

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

CORSO DI LAUREA IN FISICA

DIPARTIMENTO DI FISICA "GALILEO GALILEI"

TESI DI LAUREA

**Calcolo con tecniche funzionali
di correlazioni e condensati
nel modello di Schwinger massivo**

LAUREANDO: ANGELO SCHIAVI

RELATORE: Ch.mo Prof. ANTONIO BASSETTO

ANNO ACCADEMICO 1995-1996

Indice

1	Teorie di campo a temperatura finita	11
1.1	Propagatore del campo scalare libero	14
1.2	Estensione a campi fermionici e di gauge	18
2	Il modello di Schwinger sul cilindro	
	- approccio operatoriale -	19
2.1	Bosonizzazione	26
2.1.1	Anomalia chirale	30
2.2	Vuoti θ	30
2.2.1	Libertà di gauge residua	31
2.3	Termine di massa	35
2.3.1	Rottura della simmetria del vuoto	37
2.4	Calcolo numerico del condensato chirale	38
2.4.1	Andamenti asintotici	40
2.4.2	Risoluzione numerica	42
3	Il modello di Schwinger sul toro e sul cilindro	
	-approccio funzionale-	45
3.1	L'azione euclidea e la struttura del campo di gauge	45
3.2	L'operatore di Dirac sul toro	48
3.2.1	Nucleo di $i\mathcal{D}$	49
3.2.2	Sviluppo in autofunzioni	50
3.3	Quantizzazione con integrali di cammino	51
3.3.1	Funzioni di correlazione fermioniche con campo esterno	53

3.4	Condensato chirale libero	58
3.5	Vuoti θ in approccio funzionale	65
3.6	Espansione perturbativa	72
3.6.1	Condensato chirale	78
3.7	Calcolo numerico	79
4	Conclusioni e prospettive	88
A	appendice	92
B	appendice	94
C	appendice	98
D	appendice	100

Introduzione

Nella fisica delle particelle elementari la complessità dei comportamenti esibiti dai modelli è legata al numero di famiglie di particelle coinvolte nei processi e dal tipo della loro interazione.

L'approccio moderno per descrivere i fenomeni subatomici fa ricorso a teorie di campo quantistiche: queste permettono di partire da semplici costituenti liberi, cioè non interagenti, e di aggiungere in modo semplice ed intuitivo l'interazione delle particelle e le simmetrie osservate in natura.

Le grandi conquiste della fisica d'inizio secolo sono contenute nella definizione degli operatori di campo: le trasformazioni sotto il gruppo di Poincarè e le proprietà di commutazione per distanze spazio-temporali sono gli ingredienti principali con i quali si definiscono i campi associati alle particelle. Le proprietà cinematiche vengono inglobate nella struttura del campo ricorrendo alla sovrapposizione di onde.

L'oggetto in cui sono condensate tutte queste informazioni è la Lagrangiana che descrive il modello: sommando le Lagrangiane associate ai campi liberi ed aggiungendo qualche termine che mescoli i vari campi è possibile creare nuovi modelli e nuove interazioni. Così vengono costruiti l'elettrodinamica quantistica, il modello elettrodebole e la cromodinamica quantistica: la ricchezza e la bellezza di questi modelli appaiono quando si studiano i processi ad alta energia e l'interazione coinvolge tutte le specie componenti il modello.

L'approccio perturbativo alla soluzione delle teorie di campo dà ottimi risultati e permette di capire la dinamica elementare delle particelle coinvolte ed i loro rapporti di forza. Ci sono però alcuni fenomeni che non sono perturbativi, nel senso che l'espansione ad esempio in loops non è significativa: grafici di ogni ordine contribuiscono in modo determinante al processo e non è possibile arrestare lo sviluppo in serie. Alcuni interessanti comportamenti sono nascosti in complesse interazioni, nelle quali è più facile constatare la presenza di un fenomeno piuttosto che capirne l'origine e le proprietà.

Per questi motivi i fisici si sono rivolti allo studio dei modelli in due di-

mensioni: alcuni di questi sono solubili non perturbativamente e permettono di sondare comportamenti che in quattro dimensioni sono mascherati dal maggior numero di gradi di libertà spaziale.

Il modello di Schwinger

L'elettrodinamica quantistica in 1+1 dimensioni è stata risolta esattamente per la prima volta nel 1962 da J.Schwinger[1] e da lui ha preso il nome con il quale oggi è conosciuta: il modello di Schwinger.

Schwinger sondò la teoria utilizzando le funzioni di Green degli operatori, ma questo approccio non si rivelò pienamente soddisfacente per spiegare l'intima dinamica del modello.

Nel 1970 J.H.Lowenstein e J.A.Swieca pubblicano un'analisi del modello [5] che utilizza il formalismo degli operatori quantistici definiti in spazi di Hilbert: questo lavoro è oggi il punto di riferimento per gli studiosi del modello di Schwinger ed in esso sono contenuti tutti gli ingredienti fondamentali che rendono così interessante questa teoria.

In particolare si vede che l'algebra degli osservabili è isomorfa a quella di un campo scalare libero, il quale può essere pensato come uno stato legato di fermione e antifermione: non ci sono stati asintotici di carica e per questo motivo il modello sembra esibire una realizzazione concreta del confinamento dei quark atteso per QCD_4 .

Quello che avviene, come S.Coleman [8] fa notare, è che se tentiamo di separare una coppia fermione-antifermione, quando la distanza è abbastanza grande, diventa energeticamente conveniente la generazione dal vuoto di una nuova coppia fermione-antifermione. Il nuovo fermione viene attratto dall'originale antifermione ed il nuovo antifermione è attratto dal fermione originale; questo fenomeno scherma l'interazione Coulombiana a lungo raggio tra le cariche di partenza e assicura che quello che stiamo separando non sono un fermione ed un antifermione, ma due stati legati fermione-antifermione.

Un altro aspetto interessante è la struttura del vuoto: esistono infatti in-

finiti stati di vuoto equivalenti per il modello ed ognuno di essi può essere etichettato dal valore di una coordinata angolare θ : l'origine di questa degenerazione è dovuta al legame tra l'invarianza della teoria per gauge grandi e il numero di avvolgimento della trasformazione di gauge.

Il modello di Schwinger è anche un ottimo banco di prova per lo studio delle rotture di simmetria non accompagnate da bosoni di Goldstone (problema $U(1)$ in QCD) e del ruolo dinamico giocato dalle anomalie.

La prima trattazione soddisfacente di QED_2 con la tecnica degli integrali di cammino è quella di C. Jayewardena [4] del 1988. In questo lavoro il modello di Schwinger viene definito sulla sfera bidimensionale S^2 , poichè in tal caso l'operatore di Dirac ha spettro discreto ed ammette un insieme completo di autofunzioni: ingredienti questi necessari per una corretta definizione della misura funzionale associata al campo fermionico.

Il numero dei modi nulli dell'operatore di Dirac è legato alla classe topologica del campo di gauge in base al teorema dell'indice di Atiyah-Singer e si vede che solo sommando i contributi provenienti da tutti i settori topologici si ottengono risultati consistenti con la tecnica operatoriale.

Negli ultimi anni l'interesse degli studiosi si è concentrato sulla versione del modello di Schwinger a temperatura finita: in questo caso una dimensione dello spazio viene compattificata ed ad essa resta associato un parametro d'ordine analogo alla temperatura in meccanica statistica. Anche questo adattamento del modello è esattamente solubile [6] [12] e viene usato per gettare luce sulla non conservazione del numero barionico nella teoria elettrodebole [9].

Struttura della tesi

In questa tesi ci occuperemo del modello di Schwinger massivo e studieremo l'andamento con la temperatura delle funzioni di correlazione fermioniche e del condensato chirale.

L'introduzione di un termine di massa rompe la solubilità della teoria, per lo meno con le tecniche utilizzate per il modello originario. Assistiamo però in questo caso ad un interessante fenomeno: gli stati θ del modello senza massa non sono più equivalenti ed anzi nell'Hamiltoniana quantistica entra una dipendenza esplicita dal valore dell'angolo θ : la fisica del modello è quindi influenzata da un parametro originariamente non presente nella Lagrangiana classica.

Altre caratteristiche della teoria senza massa invece permangono: ad esempio si osserva ancora il confinamento dei fermioni [8] e questo fatto è di grande importanza per lo studio dei modelli a quark pesanti.

La discussione dell'argomento della tesi è così strutturata:

nel capitolo 1 introduciamo le teorie di campo a temperatura finita e le confrontiamo con le usuali teorie di campo.

Il capitolo 2 è dedicato al modello di Schwinger massivo affrontato con tecniche operatoriali: punto d'arrivo è il calcolo del condensato chirale al variare della temperatura, riproducendo la tecnica di integrazione di [11].

Nel capitolo 3 studiamo il modello di Schwinger in approccio funzionale: all'inizio scegliamo di lavorare sul toro bidimensionale per avere una buona definizione degli integrali di cammino; in seguito ci riserviamo di decompattificare una dimensione e di ottenere così le funzioni di correlazione sul cilindro.

Con questi strumenti possiamo impostare un calcolo perturbativo del condensato chirale del modello di Schwinger massivo che sia confrontabile con i risultati del capitolo 2.

Notazioni

Mettrica euclidea e matrici gamma

mettrica $\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

tensore antisimmetrico $\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

matrici gamma in 2d

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^\dagger$$

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1$$

$$\gamma_\mu\gamma_5 = -i\epsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

la rappresentazione che scegliamo è

$$\gamma_0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mettrica di Minkowskij e matrici gamma

mettrica $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu$$

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Unità di misura naturali

$$c = \hbar = 1$$

Derivata covariante e trasformazioni di gauge

$$D_\mu = \partial_\mu + i g A_\mu$$

$$\begin{cases} \psi' = U \psi = e^{i\alpha(x)} \psi \\ \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^{-1} = \bar{\psi} e^{-i\alpha(x)} \\ D'_\mu = U D_\mu U^{-1} \end{cases}$$

quindi

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x)$$

Volume del toro \mathcal{T}

$$V = \beta L \quad (= L_1 L_2)$$

Trasformate di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int dk e^{-ikx} \tilde{f}(k)$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int dx e^{+ikx} f(x)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{V} \int dk e^{-ikx}$$

delta periodica su una circonferenza

$$\delta_L(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n e^{-i\omega_n x} = \sum_p \delta(x - pL), \quad n, p \in \mathbf{Z}$$

Prodotti di operatori

$$:A(x) B(x): = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon^2 < 0} \left[A(x + \varepsilon) B(x) - \langle vuoto | A(x + \varepsilon) B(x) | vuoto \rangle \right]$$

Variabili di Grassmann e regole di integrazione alla Berezin

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0$$

$$\theta^2 = 0$$

$$\int d\theta = 0 \quad \int d\theta \theta = 1$$

$$\int d\theta d\eta \eta \theta = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \theta \eta = -\frac{\partial}{\partial \eta} \eta \theta = -\theta$$

Capitolo 1

Teorie di campo a temperatura finita

Per calcolare alcuni integrali, come nella regolarizzazione dimensionale, è spesso conveniente passare da una teoria di campo relativistica definita in uno spazio di Minkowskij alla corrispondente teoria euclidea.

Il passaggio avviene tramite una rotazione di Wick che consiste in una continuazione analitica dal tempo reale t al tempo immaginario τ :

$$t \rightarrow -i\tau,$$

a cui si accompagna una rotazione inversa nello spazio dei momenti

$$k_0 \rightarrow ik_\tau,$$

che evita la posizione dei poli della prescrizione causale dei propagatori $(k^2 - m^2 + i\varepsilon)$.

Questo trasforma la metrica di Minkowskij in una metrica euclidea

$$t^2 - x^2 \rightarrow -(\tau^2 + x^2).$$

Nello spazio euclideo di arrivo i fattori di fase che oscillano all'infinito dello spazio relativistico diventano esponenziali decrescenti e si comportano come fattori di smorzamento; gli integrali si possono ora calcolare e i risultati

vengono continuati analiticamente all'indietro con una rotazione inversa di Wick.

In questo quadro la teoria di campo euclidea non gode di una propria dignità , perchè è solo un metodo di calcolo raffinato che viene utilizzato per la sua semplicità concettuale e la sua efficacia. Se si prende però in seria considerazione l'esistenza delle teorie di campo euclidee e ci si interroga sul loro significato fisico si scopre che possono essere facilmente adattate a rappresentare l'equivalente in teoria dei campi della meccanica quantistica statistica[15].

Prendiamo come punto di partenza l'ampiezza di probabilità di un sistema di meccanica quantistica a singola particella; ricupereremo in seguito il formalismo delle teorie di campo.

$$F(q', t'; q, t)$$

sia la probabilità di trovare la particella nel punto q' al tempo t' , se si trovava in q al tempo t .

Sia H l'Hamiltoniana totale, indipendente dal tempo: l'evoluzione temporale degli stati in visuale di Schrödinger implica

$$F(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle . \quad (1.1)$$

Possiamo subito introdurre il formalismo dell'integrale di cammino per esprimere la (1.1):

$$F(q', t'; q, t) = \int_q^{q'} \mathcal{D}q(t'') e^{-i \int_t^{t'} \mathcal{L}(t'') dt''} , \quad (1.2)$$

dove la classe di funzioni su cui si integra soddisfa alla condizione al contorno

$$q(t) = q \quad ; \quad q(t') = q' . \quad (1.3)$$

Abbiamo supposto per semplicità che l'Hamiltoniana del sistema sia tale da poter usare l'integrale funzionale (1.2) nella forma p-integrata.

La continuazione analitica a tempi immaginari di (1.1) porta a

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}q e^{-S_E(\tau' - \tau)}, \quad (1.4)$$

dove S_E è l'azione euclidea data da

$$S_E(\tau' - \tau) = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau'') + V(q(\tau'')) \right). \quad (1.5)$$

Introduciamo ora la funzione di partizione della meccanica quantistica statistica:

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (1.6)$$

dove per calcolare la traccia abbiamo usato una base di autovettori dell'Hamiltoniana H .

Per facilitare il confronto con la teoria dei campi, abbiamo posto in $Z(\beta)$ la costante di Boltzmann $k_B = 1$. Il parametro β è l'inverso della temperatura T associata al sistema statistico.

Scegliamo ora di calcolare la traccia operatoriale contenuta in (1.6) su una base di autostati dell'operatore di posizione

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle \\ &= \int dq F(q, -i\beta; q, 0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Confrontando l'ultimo termine con (1.4) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[- \int_0^{\beta} d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}q e^{-S_E(\beta)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove l'integrazione è estesa a **tutte** le funzioni periodiche nel tempo immaginario di periodo β , come si può vedere da (1.7):

$$q(\beta) = q(0).$$

L'estensione ad una teoria di campo si fa ora nel solito modo riscrivendo la (1.8) in termini di un campo scalare ϕ :

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\beta) + \int_0^\beta d^2x j(x)\phi(x)}, \quad (1.9)$$

dove $x = (\tau, x)$ e la misura dell'integrale euclideo è

$$\int_0^\beta d^2x = \int_0^\beta d\tau \int dx. \quad (1.10)$$

In (1.9) abbiamo aggiunto un termine di sorgente che permette di ricavare le funzioni di correlazione tramite derivata funzionale.

Ad esempio il propagatore del campo scalare è

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(x)\delta j(y)} \right|_{j=0}. \quad (1.11)$$

Notiamo che nell'ambito della teoria euclidea a temperatura finita la coordinata temporale immaginaria si compattifica ad una circonferenza e i campi (scalari) obbediscono a condizioni di periodicità. La teoria a temperatura T è definita su un cilindro di dimensioni $[\beta \times \infty]$. Nel limite $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$ e si recupera la teoria sul piano euclideo: è per questo che le usuali teorie di campo sul piano euclideo sono dette a 'temperatura nulla'.

1.1 Propagatore del campo scalare libero

La lagrangiana del campo scalare nello spazio di Minkowskij è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.12)$$

da cui si ricava l'azione euclidea a temperatura finita

$$S_E(\beta) = \int_0^\beta d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (1.13)$$

Completiamo la forma quadratica nel funzionale generatore $Z(\beta; j)$

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - j(x)\phi(x)} \quad (1.14)$$

per ottenere tramite la (1.11)

$$Z(\beta; j) = Z(\beta) e^{\frac{1}{2} \int_0^\beta d^2x d^2y j(x) \Delta_m(x-y) j(y)} \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(x) \delta j(y)} \right|_{j=0} = \Delta_m(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.16)$$

dove la $\Delta_m(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ è la funzione di Green associata all'operatore di Klein-Gordon euclideo sul cilindro:

$$(-\Delta + m^2) \Delta_m(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(x - y). \quad (1.17)$$

Nello spazio dei momenti la (1.17) diventa

$$(\omega_n^2 + \omega_k^2) \Delta_m(i\omega_n, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}, \quad (1.18)$$

dove

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad \omega_k = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.19)$$

Le frequenze discrete ω_n sono dette frequenze di Matsubara e nascono dal fatto che il tempo immaginario è una circonferenza.

A temperatura finita il propagatore scalare libero nello spazio dei momenti è

$$\Delta_m(i\omega_n, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2}. \quad (1.20)$$

Spesso torna utile la sua rappresentazione mista

$$\begin{aligned} \Delta_m(\tau, k) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i2\pi n \frac{\tau}{\beta}} \frac{\beta^2}{4\pi^2} \frac{1}{n^2 + \frac{\beta^2 \omega_k^2}{4\pi^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_k} \frac{\cosh\left(\frac{\beta\omega_k}{2} - \omega_k \tau\right)}{\sinh\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right)} \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_k} \left[(1 + n(\omega_k)) e^{-\omega_k \tau} + n(\omega_k) e^{-\omega_k \tau} \right], \quad (1.22)$$

dove in (1.21) abbiamo usato l'identità [6]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{a^2 + n^2} = \frac{\pi \cosh(\pi a(1 - 2x))}{a \sinh(\pi a)} \quad a > 0, x \geq 0. \quad (1.23)$$

Con $n(\omega)$ abbiamo indicato la distribuzione di Bose-Einstein:

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta|\omega|} - 1}. \quad (1.24)$$

Nel piano euclideo il propagatore scalare soddisfa ad una equazione analoga alla (1.17) nella quale le frequenze temporali sono continue:

$$\begin{aligned} \Delta_m(\tau, x; T = 0) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(k_0\tau + k_1x)}}{k_0^2 + k_1^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} K_0(m\sqrt{\tau^2 + x^2}) \\ &= \frac{1}{2\pi} K_0(m|x|), \end{aligned} \quad (1.25)$$

dove K_0 è la funzione di Bessel modificata ¹.

Per evidenziare il legame tra il propagatore a temperatura finita e quello a $T = 0$, calcoliamo esplicitamente la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_m(\tau + n\beta, x; T = 0) = \int \frac{dk_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik_1x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_m(\tau + n\beta, k_1; T = 0), \quad (1.26)$$

nella quale abbiamo scelto la rappresentazione mista $\Delta_m(\tau, k)$ per il propagatore. Usando la formula (cfr.[17])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{|a|} e^{-|\alpha a|} \quad a, \alpha \in \mathbf{R}$$

deriviamo l'espressione

$$\Delta_m(\tau + n\beta, k_1; T = 0) = \int \frac{dk_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-ik_0(\tau+n\beta)}}{k_0^2 + k_1^2 + m^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_k} e^{-\omega_k|\tau+n\beta|}. \quad (1.27)$$

Possiamo calcolare ora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_m(\tau + n\beta, k_1; T = 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_k} e^{-\omega_k|\tau+n\beta|}$$

¹Per alleggerire la notazione nel testo indicheremo con il simbolo $|x|$ la norma del vettore dello spazio sia esso euclideo o di Minkowskij: $|x| = \sqrt{x_0^2 \pm x_1^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_k} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\omega_k(\tau+n\beta)} + \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{+\omega_k(\tau+n\beta)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_k} \left[(1 + n(\omega_k))e^{-\omega_k\tau} + n(\omega_k)e^{-\omega_k\tau} \right] \\
&= \Delta_m(\tau, k_1; T), \tag{1.28}
\end{aligned}$$

dove abbiamo ristretto τ all'intervallo $[0, \beta[$ perchè la serie su n è invariante per $\tau \rightarrow \tau' = \tau + m\beta$. Riunendo i pezzi, abbiamo quindi trovato che

$$\Delta_m(\tau, k; T) = \sum_n \Delta_m(\tau + n\beta, k; T = 0) \tag{1.29}$$

e questo ci permette di discutere facilmente le singolarità delle teorie di campo a temperatura finita. Infatti il propagatore scalare massivo sul piano euclideo ha solo una singolarità di tipo ultravioletto nell'origine; dalla (1.29) si vede che solo per $n = 0$ il propagatore a temperatura finita ha una singolarità ultravioletta ed è la stessa della teoria a $T = 0$.

Per rinormalizzare una teoria a temperatura finita basta quindi rinormalizzare la corrispondente teoria a $T = 0$, dal momento che la temperatura non modifica la teoria a distanze $\ll \frac{1}{T}$ e le singolarità ultraviolette sono le stesse della teoria a temperatura nulla[15].

Per consistenza verifichiamo le proprietà di periodicità del propagatore libero ed il limite di decompattificazione:

$$\Delta_m(\tau+\beta, k; T) = \sum_n \Delta_m(\tau+n\beta+\beta, k; T = 0) = \sum_{n'} \Delta_m(\tau+n'\beta, k; T = 0) = \Delta_m(\tau, k; T) \tag{1.30}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta_m(\tau, k; T) = \Delta_m(\tau, k; 0) + \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n \neq 0} \Delta_m(\tau + \frac{n}{T}, k; 0) = \Delta_m(\tau, k; 0) \tag{1.31}$$

1.2 Estensione a campi fermionici e di gauge

Abbiamo visto che le funzioni su cui sommiamo nell'integrale di cammino

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\beta)} \quad (1.32)$$

sono periodiche per il campo scalare. Lo stesso vale per un campo di gauge ed in generale per variabili bosoniche, mentre nel caso di un campo fermionico si trova che una buona scelta è richiedere condizioni di antiperiodicità [15],[16]. Questo non altera comunque la periodicità degli osservabili fisici che sono formati con bilineari del campo fermionico.

Nel seguito associeremo a variabili dinamiche le seguenti proprietà di periodicità a temperatura finita:

$$\begin{array}{ll} \text{BOSONI} & \implies \text{PERIODICI} \\ \text{FERMIONI} & \implies \text{ANTIPERIODICI} \end{array}$$

Capitolo 2

Il modello di Schwinger sul cilindro - approccio operatoriale -

In questo capitolo imposteremo il calcolo del condensato chirale $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta$ del modello di Schwinger massivo, ripercorrendo la strada tracciata da Y.Hosotani nei suoi ultimi lavori ([12] 1988, [11]1996).

Lo scopo è quello di seguire lo sviluppo dell'articolo [11], esplicitando i conti lasciati indicati da Hosotani, in modo da controllare le ipotesi che implicitamente conducono al risultato. Questo ci permetterà di toccare da vicino molti aspetti caratteristici del modello di Schwinger, quali i vuoti θ , la generazione dinamica della massa e la rottura spontanea dell' invarianza chirale che conduce ad una teoria anomala.

La densità di lagrangiana del modello di Schwinger massivo è

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - gA_\mu)\psi - m(M + M^\dagger) \\ M &= \bar{\psi}\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi,\end{aligned}\tag{2.1}$$

dove le matrici gamma sono $\gamma^\mu = (\sigma_1, i\sigma_2)$ e lo spinore è scomposto nelle componenti $\psi^t = (\psi_+, \psi_-)$ che soddisfano all'equazione di Dirac libera senza

massa:

$$(\partial_0 \mp \partial_1)\psi_{\pm} = 0.$$

La metrica che utilizziamo è quella di Minkowskij: per ricondursi ad una teoria di campo a temperatura finita occorre fare una rotazione di Wick e passare alla corrispondente teoria euclidea.

Scegliamo di lavorare su un cilindro \mathcal{C} nel quale la coordinata spaziale corre su una circonferenza lunga L . La dimensione temporale è decompattificata. Una volta calcolate le quantità fisiche che interessano, il confronto con i risultati a temperatura finita avviene facendo le seguenti identificazioni:

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow \beta = \frac{1}{T} \\ it &\longrightarrow x_E \\ x &\longrightarrow \tau_E \end{aligned} \tag{2.2}$$

che significa che la lunghezza L della circonferenza diventa la temperatura T della teoria euclidea, il tempo t sul cilindro diventa la coordinata spaziale decompattificata ed infine x che varia sulla circonferenza L diventa il tempo immaginario τ_E della teoria euclidea.

In (2.1) il termine di massa è stato scomposto nelle due densità chirali M e M^\dagger . I parametri dimensionali del sistema sono l'accoppiamento elettromagnetico g (carica elettrica) e il parametro di massa m : entrambi in 2D hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza.

Richiediamo che gli osservabili ($F_{\mu\nu}$ e $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$) siano a singolo valore sul cilindro: una scelta possibile per le variabili dinamiche è la seguente

$$\begin{aligned} A_\mu(t, x + L) &= A_\mu(t, x), \\ \psi(t, x + L) &= -\psi(t, x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Osserviamo che, in accordo con quanto visto sulle teorie di campo a temperatura finita, il campo fermionico soddisfa a condizioni di antiperiodicità .

V'è uno stretto legame tra simmetria di gauge e condizioni di periodicità : la prima afferma che la lagrangiana è invariante per le trasformazioni di gauge

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\psi \\ \bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi} \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

La condizione (2.3) impone notevoli restrizioni sulla classe di trasformazioni di gauge ammesse dalla teoria: per il campo A_μ dovrà valere

$$A'_\mu(t, x + L) = A'_\mu(t, x),$$

che implica il seguente vincolo di periodicità per le funzioni di gauge

$$\partial_\mu\alpha(t, x + L) = \partial_\mu\alpha(t, x), \quad (2.5)$$

mentre l'antiperiodicità del campo ψ porta a

$$\begin{aligned} \psi'(t, x + L) &= e^{i\alpha(t, x+L)}\psi(t, x + L) \\ &= -e^{i\alpha(t, x+L)}\psi(t, x) \\ &= -e^{i(\alpha(t, x+L) - \alpha(t, x))} \psi'(t, x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

che assieme a (2.3) porta alla condizione

$$\alpha(t, x + L) - \alpha(t, x) = 2\pi m, \quad m \in Z \quad (2.7)$$

e per $m \neq 0$ la funzione di gauge ha un avvolgimento topologico non banale.

Scegliamo di lavorare nella gauge fisica di Coulomb, nella quale il grado di libertà spaziale del campo di gauge è trasverso

$$\partial_1 A_1(t, x) = 0, \quad (2.8)$$

che equivale a

$$A_1(t, x) = b(t) + cost. \quad (2.9)$$

Il modo nullo $b(t)$ non viene determinato dal gauge fixing (2.8) e come vedremo costituisce l'unico grado di libertà fisico del campo A_μ .

Nell'ambito della gauge di Coulomb abbiamo una simmetria di gauge residua che possiamo così esprimere

$$A_1(t, x) = b(t) - \frac{1}{g} \partial_1 \alpha(x) \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \partial_1 \alpha(x) = \text{cost.} \\ \alpha(x) = \mathbf{A} x + \mathbf{B}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Da (2.7) otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha(x + L) &= \mathbf{A}(x + L) + \mathbf{B} = \alpha(x) + \mathbf{A} L = \\ &= \alpha(x) + 2\pi m \end{aligned} \quad (2.12)$$

e quindi

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi}{L} m, \quad (2.13)$$

che esprime la libertà di gauge residua per il modo nullo $b(t)$.

La costante \mathbf{B} contenuta in (2.11) è legata all'invarianza per gauge globali: infatti una funzione di gauge costante $\alpha(x) = \alpha$ genera la trasformazione di gauge

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow e^{i\alpha} \psi \\ \bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi} \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu \end{cases} \quad (2.14)$$

che viene tradotta dal teorema di Noether nella conservazione della corrente j^μ o altrimenti della carica elettrica associata al campo fermionico

$$Q = \int dx j^0.$$

Da un punto di vista classico anche la corrente chirale $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ è conservata,

perchè le trasformazioni chirali

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi \\ \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5} \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu \end{cases} \quad (2.15)$$

sono simmetrie della lagrangiana.

La carica conservata è

$$Q_5 = \int dx j_5^0. \quad (2.16)$$

Calcoliamo le equazioni dinamiche di Maxwell per il campo elettromagnetico:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad \nu = 0, 1 \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \partial_1 E = g j^0 \\ \partial_0 E = -g j^1, \end{cases} \quad (2.18)$$

dove il campo elettrico è dato da

$$E(t, x) = F_{01} = \partial_0 b(t) - \partial_1 A_0(t, x). \quad (2.19)$$

Le equazioni del moto (2.18) implicano che la carica elettrica Q conservata sia nulla:

$$Q = \int_0^L dx j^0 = \frac{1}{g} \int_0^L dx \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

(l'ultima uguaglianza è ottenuta per periodicità da (2.3)).

Dalla forma del campo elettrico E ricaviamo il comportamento della componente temporale A_0 del campo di gauge: dalla (2.19) e (2.18) otteniamo

$$\partial_1^2 A_0(t, x) = -g j^0(t, x), \quad (2.21)$$

da cui invertendo

$$A_0(t, x) = -g \int_0^L dy G(x, y) j^0(t, y), \quad (2.22)$$

dove $G(x, y)$ è la funzione di Green periodica che soddisfa a

$$\partial_1^2 G(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{L} \quad (2.23)$$

(cfr. appendice C).

Come si può vedere, la componente A_0 è determinata dalla corrente j^0 a meno di una costante additiva: l'unico grado di libertà fisico di A_μ rimane quindi il modo nullo $b(t)$.

Quest'ultimo è direttamente legato alla linea di Wilson sul cilindro

$$e^{ig \int_0^L dx A_1(t, x)} = e^{igL b(t)}. \quad (2.24)$$

La densità di lagrangiana \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \gamma^\mu (i\partial_\mu - gA_\mu) \psi - m(M + M^\dagger) \quad (2.25)$$

fornisce i momenti coniugati alle variabili dinamiche fisiche ψ e A_1 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_\mu} = -F^{0\mu} \quad (2.26)$$

e quindi il momento coniugato a A_1 è

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_0^L dx -F^{01} = \int_0^L dx E \\ &= \int_0^L dx \dot{b}(t) - \partial_1 A_0(t, x) = L \dot{b}(t) - [A_0(t, x)]_0^L \\ &= L \dot{b}(t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

La lagrangiana non fornisce invece il momento coniugato π_0 , ma questo non costituisce un problema in quanto abbiamo visto che A_0 non è fisico.

Il momento coniugato a ψ è $i\psi^\dagger$.

L'Hamiltoniana della parte cinetica del campo di gauge è

$$H_{F_{\mu\nu}} = \Pi_1 \dot{A}_1 - L(\Pi_1, A)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Pi_1^2}{L} - L(\Pi_1, A) \\
&= \frac{\Pi_1^2}{L} - \frac{1}{2}E^2(\Pi_1, A) \\
&= \frac{\Pi_1^2}{2L} - \frac{1}{2} \int_0^L dx (\partial_1 A_0)^2 \\
&= \frac{\Pi_1^2}{2L} + \frac{1}{2} \int_0^L dx A_0(t, x) \partial_1^2 A_0(t, x). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Lasciando da parte per il momento l'Hamiltoniana di massa

$$H_m = m(M + M^\dagger), \tag{2.29}$$

l'Hamiltoniana fermionica è

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\psi &= i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + g\bar{\psi} \not{A} \psi \\
&= -i\bar{\psi} \gamma^1 \partial_1 \psi + g\bar{\psi} \not{A} \psi, \tag{2.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\psi &= \int_0^L dx \mathcal{H}_\psi \\
&= \int_0^L dx -i\bar{\psi} \gamma^1 \partial_1 \psi + g\bar{\psi} \not{A} \psi. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Infine otteniamo l'Hamiltoniana totale

$$H = \frac{\Pi_1^2}{2L} + \int_0^L dx \bar{\psi} \gamma^1 (-i\partial_1 + gA_1) \psi - \frac{g^2}{2} \int_0^L dx dy j^0(t, x) G(x-y) j^0(t, y) + H_m, \tag{2.32}$$

dove abbiamo usato la relazione (2.22) per la componente A_0 .

Riscriviamo la (2.32) introducendo la fase non integrabile Θ_W della linea di Wilson

$$e^{ig \int_0^L dx A_1(t, x)} = e^{i\Theta_W(t)}. \tag{2.33}$$

Nel nostro caso, in cui $A_1(t, x) = A_1(t)$, la fase è semplicemente

$$\Theta_W = gLA_1(t). \tag{2.34}$$

Facciamo il cambio di variabili coniugate

$$\{\Pi_1, A_1\} \longrightarrow \{P_W, \Theta_W\} = \left\{ \frac{\Pi_1}{gL}, gLA_1 \right\}$$

ed arriviamo all'espressione

$$H = \frac{g^2 L P_W^2}{2} + \int_0^L dx \bar{\psi} \gamma^1 \left(-i\partial_1 + \frac{\Theta_W}{L} \right) \psi - \frac{g^2}{2} \int_0^L dx dy j^0(t, x) G(x-y) j^0(t, y) + H_m. \quad (2.35)$$

2.1 Bosonizzazione

In 2 dimensioni è possibile scrivere un campo fermionico in termini di soli operatori bosonici. In gauge di Coulomb e in visuale di interazione, scegliamo per il campo ψ senza massa la seguente bosonizzazione [11]:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} C_{\pm} e^{\pm i\{q_{\pm} + 2\pi p_{\pm}(t \pm x)/L\}} : e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(t, x)} : \\ C_+ &= 1, \quad C_- = \exp\{i\pi(p_+ - p_-)\} \\ \phi_{\pm}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi n)^{-1/2} \{c_{\pm, n} e^{-2\pi i n(t \pm x)/L} + \text{herm.con.}\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

con le regole di commutazione

$$[q_{\pm}, p_{\pm}] = 1 \quad [c_{\pm, n}, c_{\pm, m}^{\dagger}] = \delta_{m, n}. \quad (2.37)$$

Il normal-ordering in (2.36) è inteso rispetto agli operatori (c_n, c_n^{\dagger}) . Il campo scalare ϕ è neutro elettricamente ed è costruito con soli stati eccitati. I portatori di carica elettrica sono gli operatori p_{\pm} .

Per passare dalla forma classica dell'Hamiltoniana (2.35) a quella quantizzata usiamo la definizione (2.36) degli operatori e regolarizziamo i vari termini con la tecnica del point-splitting.

Gli operatori di campo sono distribuzioni a valori operatoriali e il prodotto di due o più operatori nello stesso punto non è ben definito: è necessaria

pertanto una procedura consistente per definire quantisticamente le correnti cariche, il termine cinetico e l'interazione elettromagnetica contenuti in (2.35).

Adottiamo il point-splitting per distanze di tipo spazio con l'inserzione, ove occorra, di una linea di Wilson per rendere gauge invariante il prodotto di operatori.

Ad esempio definiamo la corrente j^μ come il limite

$$j^\mu(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\bar{\psi}(t, x + \varepsilon) \gamma^\mu e^{-ig \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dz} \psi(t, x) - \text{v.a.v.} \right], \quad (2.38)$$

dove v.a.v. è la sottrazione del valore di aspettazione nel vuoto.

Verifichiamo che j^μ sia gauge invariante per ogni ε :

in corrispondenza alla trasformazione di gauge

$$\begin{cases} \psi(t, x) \longrightarrow e^{i\alpha(t, x)} \psi(t, x) \\ \bar{\psi}(t, x + \varepsilon) \longrightarrow \bar{\psi}(t, x + \varepsilon) e^{-i\alpha(t, x + \varepsilon)} \\ A_\mu(t, x) \longrightarrow A_\mu(t, x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(t, x) \end{cases}, \quad (2.39)$$

la linea di Wilson trasforma secondo

$$e^{-ig \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dz} \longrightarrow e^{-ig \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dz} e^{i \int_x^{x+\varepsilon} \partial_1 \alpha(t, z) dz} = e^{-ig \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dz} e^{i\alpha(t, x + \varepsilon) - i\alpha(t, x)} \quad (2.40)$$

e quindi la corrente è invariante nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$j'^\mu(t, x) = j^\mu(t, x).$$

Scomponiamo le correnti

$$\begin{cases} j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- \\ j^1 = \bar{\psi} \gamma^1 \psi = -\psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} j^+ = j^0 - j^1 = 2\psi_+^\dagger \psi_+ \\ j^- = j^0 + j^1 = 2\psi_-^\dagger \psi_- \end{cases}. \quad (2.42)$$

Calcoliamo le due correnti j^\pm con la tecnica del point-splitting:

$$j^\pm(t, x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\psi_\pm^\dagger(t, x + \varepsilon) \psi_\pm(t, x) e^{-ig \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dz} - \text{v.a.v.} \right]. \quad (2.43)$$

In appendice A è riportato il conto esplicito del termine di densità fermionica

$$\psi_{\pm}^{\dagger}(x+\varepsilon)\psi_{\pm}(x) = \frac{-i}{2\pi\varepsilon_{\pm}} e^{-i\frac{\pi}{L}\varepsilon_{\pm}} e^{\mp i\frac{2\pi}{L}p_{\pm}\varepsilon_{\pm}} e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(-)}(x+\varepsilon)} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(-)}(x)} e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(+)}(x+\varepsilon)} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(+)}(x)}. \quad (2.44)$$

Facciamo il limite per distanze di tipo puramente spaziale:

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon^0 \pm \varepsilon^1 = \pm\varepsilon^1 =: \pm\varepsilon. \quad (2.45)$$

La linea di Wilson è

$$e^{-ig\int_{t,x}^{t,x+\varepsilon} A_1(t) dz} = e^{-igA_1(t)\varepsilon} = 1 - igA_1(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.46)$$

Vediamo ora quali termini sopravvivono nel limite che definisce le correnti: stiamo trattando operatori composti del tipo

$$\Phi(x+\varepsilon)\Psi(x) =: \Omega(x+\varepsilon) \quad (2.47)$$

e vogliamo fare il limite che definisce la procedura di normal ordering:

$$: \Omega(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(x+\varepsilon) - \langle \Omega(x+\varepsilon) \rangle. \quad (2.48)$$

Da (2.44) e (2.46) ricaviamo che l'operatore composto Ω può essere sviluppato implicitamente in potenze di ε :

$$\Omega(x+\varepsilon) = \frac{c}{\varepsilon} + \hat{A} + O(\varepsilon). \quad (2.49)$$

Il limite di point-splitting rimuove il termine singolare proporzionale all'operatore identità e taglia anche i termini di ordine ε ; l'unico contributo viene dall'operatore \hat{A} :

$$: \Omega(x) := \hat{A}(x) - \langle \hat{A}(x) \rangle. \quad (2.50)$$

Nel prodotto di (2.44) e (2.46)

$$\left(\frac{\mp i}{2\pi\varepsilon}\right)(1-igA_1(t)\varepsilon) \left(1\mp\frac{2\pi i}{L}p_{\pm}\varepsilon\right) \left(1-i\frac{\pi}{L}\varepsilon\right) \left(1\mp i\sqrt{4\pi}\partial_1\phi_{\pm}^{(-)}\varepsilon\right) \left(1\mp i\sqrt{4\pi}\partial_1\phi_{\pm}^{(+)}\varepsilon\right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.51)$$

teniamo quindi solo i termini che non dipendono da ε ed otteniamo

$$j^+ = -\frac{2}{L}p_+ - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_1\phi_+^{(-)} + \partial_1\phi_+^{(+)} - \frac{g}{\pi}A_1(t) = -\frac{2}{L}p_+ - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_1\phi_+ - \frac{\Theta_W}{\pi L}, \quad (2.52)$$

$$j^- = \frac{2}{L}p_- - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_1\phi_- + \frac{\Theta_W}{\pi L}. \quad (2.53)$$

Osservando che per il campo scalare ϕ vale

$$\partial_1\phi_+ = \partial_0\phi_+, \quad \partial_1\phi_- = -\partial_0\phi_-, \quad (2.54)$$

otteniamo infine le espressioni per la corrente fermionica

$$\begin{aligned} j^0(x) &= \frac{1}{2}(j^+ + j^-) = \frac{-p_+ + p_-}{L} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_1\phi, \\ j^1(x) &= \frac{1}{2}(j^- - j^+) = \frac{p_+ + p_-}{L} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_0\phi + \frac{\Theta_W}{\pi L}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Manipolazioni simili degli altri termini dell'Hamiltoniana portano alla forma bosonizzata [11][12] in visuale di Schrödinger

$$\begin{aligned} H_{tot} &= H_0 + H_\phi + H_m \\ H_0 &= \frac{g^2 L}{2}P_W^2 + \frac{1}{2\pi L}\{\Theta_W + 2\pi p\}^2 \\ H_\phi &= \int_0^L dx \frac{1}{2} : \left[\Pi^2 + (\phi')^2 + \frac{g^2}{\pi}\phi^2 \right] : \\ H_m &= \int_0^L dx m (M + M^\dagger), \end{aligned} \quad (2.56)$$

nella quale abbiamo individuato le coppie coniugate di operatori

$$\begin{aligned} \{p, q\} &= \left\{ \frac{1}{2}(p_+ + p_-), q_+ + q_- \right\} \\ \{\tilde{p}, \tilde{q}\} &= \left\{ p_+ - p_-, \frac{1}{2}(q_+ - q_-) \right\} \\ \{P_W, \Theta_W\} \\ \{\Pi, \phi = \phi_+ + \phi_-\}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

L'Hamiltoniana del modello di Schwinger senza massa è $H_{Schw} = H_0 + H_\phi$ e per comodità riscriviamo

$$H_{tot} = H_{Schw} + H_m. \quad (2.58)$$

2.1.1 Anomalia chirale

Ridiscutiamo la questione delle cariche conservate ora che abbiamo ottenuto la forma operatoriale delle correnti.

$$Q = \int_0^L dx j^0 = -p_+ + p_- \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} Q_5 &= \int_0^L dx j_5^0 = \int_0^L dx \bar{\psi} \gamma^0 \gamma_5 \psi \\ &= \int_0^L dx \bar{\psi} \gamma^1 \psi = \int_0^L dx j^1 \\ &= p_+ + p_- + \frac{\Theta_W}{\pi} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Poichè vale

$$[p_\pm, H_{Schw}] = 0 \quad (2.61)$$

la carica elettrica Q è conservata anche a livello quantistico

$$[Q, H_{Schw}] = 0, \quad (2.62)$$

mentre la carica chirale Q_5 soffre della presenza del termine anomalo $\frac{\Theta_W}{\pi}$ e non è una costante del moto

$$[Q_5, H_{Schw}] \neq 0. \quad (2.63)$$

2.2 Vuoti θ

L'Hamiltoniana libera H_{Schw} , senza il termine di massa, è composta da due termini: uno governa il comportamento del modo nullo legato alla fase non

integrabile Θ_W della loop di Wilson. L'altro descrive stati eccitati di un campo scalare di massa $\mu^2 = \frac{g^2}{\pi}$ che possono essere interpretati come stati legati di coppie fermione-antifermione.

Per cercare la soluzione di vuoto ci concentriamo solo sulla parte H_0 del modo nullo: un generico candidato ad essere lo stato di vuoto sarà

$$|\psi \rangle_{H_{Schw}} = |\psi \rangle_{H_0} \otimes |vuoto \rangle_{H_\phi} \quad (2.64)$$

e nel seguito studieremo solo la componente $|\psi \rangle_{H_0}$ che deve essere determinata in base alla dinamica tra la fase di Wilson e i portatori di carica p_\pm .

2.2.1 Libertà di gauge residua

Dopo aver fissato la gauge di Coulomb, rimane ancora la libertà di gauge (cfr. (2.10) e seguenti)

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow e^{-\frac{2\pi}{L}x} \psi \\ A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{2\pi}{gL} \delta_{\mu 1} \end{cases}, \quad (2.65)$$

che confrontata con la forma bosonica di ψ (2.36) è equivalente alla trasformazione sulle variabili bosoniche:

$$\begin{cases} \Theta_W \longrightarrow \Theta_W + 2\pi \\ p_\pm \longrightarrow p_\pm - 1 \end{cases} \quad (2.66)$$

e può essere quindi rappresentata tramite il generatore di traslazioni per i rispettivi operatori

$$U = e^{iq} e^{i2\pi P_W}. \quad (2.67)$$

Il calcolo del commutatore con l'Hamiltoniana totale

$$[U, H_{tot}] = 0 \quad (2.68)$$

conferma che U è legato ad una simmetria dinamica della teoria.

Le condizioni di periodicit  di $\psi_{\pm}(t, x)$ impongono che p_{\pm} assuma valori discreti sugli stati fisici del sistema:

$$\psi_{\pm}(t, x + L) = -e^{2\pi ip_{\pm}}\psi_{\pm}(t, x) = -\psi_{\pm}(t, x)e^{2\pi ip_{\pm}} \quad (2.69)$$

e la (2.3) porta a

$$e^{2\pi ip_{\pm}}|fisico\rangle = |fisico\rangle. \quad (2.70)$$

Poich  abbiamo visto che la carica totale   nulla

$$Q = \int_0^L dx j^0 = -p_+ + p_- = 0, \quad (2.71)$$

avremo che sugli stati fisici

$$p_+|fisico\rangle = p_-|fisico\rangle \quad (2.72)$$

ed il fattore di Klein C_- si semplifica sul sottospazio fisico

$$C_-|fisico\rangle = |fisico\rangle. \quad (2.73)$$

Poich  $[p, H_0] = 0$, scegliamo di cercare una soluzione di vuoto per ogni autovalore discreto di p come sovrapposizione di autostati di P_W :

$$\begin{aligned} P_W|p_W, n\rangle &= p_W|p_W, n\rangle \\ p|p_W, n\rangle &= n|p_W, n\rangle \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$|\psi_n\rangle = \int dp_W |p_W, n\rangle f(p_W)e^{2\pi inp_W} \quad (2.75)$$

$$\int dp_W |f(p_W)|^2 = 1, \quad (2.76)$$

dove abbiamo richiesto che gli stati $|\psi_n\rangle$ siano normalizzati

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{m,n}. \quad (2.77)$$

Vogliamo calcolare ora l'azione di H_0 su questi stati

$$H_0|\psi_n\rangle = \left[\frac{g^2 L}{2} P_W^2 + \frac{1}{2\pi L} \{\Theta_W + 2\pi p\}^2 \right] |\psi_n\rangle. \quad (2.78)$$

Θ_W in rappresentazione P_W agisce come $i \frac{d}{dp_W}$ e pertanto

$$\begin{aligned}
(\Theta_W + 2\pi p) |\psi_n\rangle &= \int dp_W |p_W, n\rangle \left(i \frac{d}{dp_W} + 2\pi n \right) f(p_W) e^{2\pi i n p_W} \\
&= \int dp_W |p_W, n\rangle \left[i \frac{df(p_W)}{dp_W} + 2\pi n - 2\pi n \right] f(p_W) e^{2\pi i n p_W} \\
&= \int dp_W |p_W, n\rangle i \frac{df(p_W)}{dp_W} e^{2\pi i n p_W}. \tag{2.79}
\end{aligned}$$

La (2.78) diventa

$$H_0 |\psi_n\rangle = \int dp_W |p_W, n\rangle e^{2\pi i n p_W} \left[\frac{g^2 L}{2} p_W^2 - \frac{1}{2\pi L} \frac{d^2}{dp_W^2} \right] f(p_W). \tag{2.80}$$

Proiettiamo ora su un generico autostato $|p'_W, n'\rangle$ usando le relazioni di ortogonalità generalizzata

$$\langle p'_W, n' | p_W, n \rangle = \delta(p'_W - p_W) \delta_{n', n} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
\langle p'_W, n' | H_0 | \psi_n \rangle &= \int dp_W \delta(p'_W - p_W) \delta_{n', n} e^{2\pi i n p_W} \left[\frac{g^2 L}{2} p_W^2 - \frac{1}{2\pi L} \frac{d^2}{dp_W^2} \right] f(p_W) \\
&= e^{2\pi i n' p'_W} \left[\frac{g^2 L}{2} p_W'^2 - \frac{1}{2\pi L} \frac{d^2}{dp_W'^2} \right] f(p'_W). \tag{2.82}
\end{aligned}$$

L'equazione agli autovalori che vogliamo risolvere è

$$H_0 |\psi_n\rangle = E |\psi_n\rangle \tag{2.83}$$

e siamo interessati al valore minimo dell'energia E . Quest'ultima equazione diventa un'equazione di Schrödinger unidimensionale nella variabile p_W grazie alla (2.82):

$$\left[\frac{g^2 L}{2} p_W^2 - \frac{1}{2\pi L} \frac{d^2}{dp_W^2} \right] f(p_W) = E f(p_W) \tag{2.84}$$

$$\left[-\frac{d^2}{dp_W^2} + \omega^2 p_W^2 \right] f(p_W) = \varepsilon f(p_W), \tag{2.85}$$

dove abbiamo posto

$$\omega^2 = \pi g^2 L^2 = (\pi \mu L)^2 \quad ; \quad \varepsilon = 2\pi L E. \quad (2.86)$$

L'equazione (2.85) è quella di un oscillatore armonico unidimensionale di frequenza $\omega = \pi \mu L$, dove μ è la massa di Schwinger

$$\mu^2 = \frac{g^2}{\pi}.$$

Lo stato fondamentale normalizzato in L^2 è

$$u(p_W) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\omega p_W^2}{2}} \quad (2.87)$$

e possiamo infine scrivere lo stato fondamentale di H_0

$$|\psi_n\rangle = \int dp_W |p_W, n\rangle e^{2\pi i n p_W} u(p_W). \quad (2.88)$$

L'indice n , autovalore di p , è completamente svincolato dalla dinamica e ne risulta che lo stato di vuoto trovato ha una degenerazione infinita discreta.

Gli stati $|\psi_n\rangle$ non sono gauge invarianti: infatti abbiamo che

$$U|\psi_n\rangle = \int dp_W |p_W, n+1\rangle e^{2\pi i n p_W} e^{2\pi i p_W} u(p_W) = |\psi_{n+1}\rangle, \quad (2.89)$$

dove abbiamo usato

$$\begin{aligned} p|n\rangle &= n|n\rangle \\ p e^{iq}|n\rangle &= e^{iq} e^{-iq} p e^{iq}|n\rangle \\ &= e^{iq}(p+1)|n\rangle = (n+1)e^{iq}|n\rangle. \end{aligned} \quad (2.90)$$

La seguente sovrapposizione di stati di vuoto è invece gauge invariante

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-in\theta} |\psi_n\rangle \quad (2.91)$$

$$U|\theta\rangle = e^{i\theta} |\theta\rangle. \quad (2.92)$$

Gli stati $|\theta\rangle$ sono normalizzati secondo

$$\langle \theta' | \theta \rangle = \delta(\theta' - \theta) \quad (2.93)$$

e rappresentano stati di vuoto equivalenti per il modello di Schwinger senza massa:

$$\begin{aligned} H|\theta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-in\theta} E_{vuoto} |\psi_n\rangle \\ &= E_{vuoto} |\theta\rangle . \end{aligned} \quad (2.94)$$

La necessità di introdurre i vuoti θ è legata oltre che alla gauge invarianza dello stato di vuoto, anche al fatto che solo con questa scelta le funzioni di Wightman soddisfano alla proprietà di cluster[22] [5].

2.3 Termine di massa

Esplicitiamo qui il calcolo della densità chirale M in forma bosonica, perchè sarà fondamentale in seguito nella discussione del modello di Schwinger massivo:

$$M = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \psi_-^\dagger \psi_+ . \quad (2.95)$$

Inserendo direttamente in questa espressione la forma bosonizzata (2.36) di ψ , calcoliamo

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{L} : e^{+i\sqrt{4\pi}\phi_-(x)} : e^{i(q_- + \frac{2\pi}{L}p_-x_-)} C_-^\dagger C_+ e^{i(q_+ + \frac{2\pi}{L}p_+x_+)} : e^{+i\sqrt{4\pi}\phi_+(x)} : \\ &= -\frac{1}{L} C_-^\dagger C_+ e^{iq_-} e^{i\frac{2\pi}{L}p_-x_-} e^{i\frac{\pi}{L}x_-} e^{iq_+} e^{i\frac{2\pi}{L}p_+x_+} e^{i\frac{\pi}{L}x_+} : e^{i\sqrt{4\pi}\phi(x)} : \\ &= -\frac{1}{L} C_-^\dagger C_+ e^{iq} e^{i\frac{2\pi}{L}(p_-x_- + p_+x_+)} e^{i\frac{2\pi}{L}x} : e^{i\sqrt{4\pi}\phi(x)} : , \end{aligned} \quad (2.96)$$

che in visuale di Schrödinger diventa

$$M = -\frac{1}{L} C_-^\dagger C_+ e^{iq} e^{i\frac{2\pi}{L}x\tilde{p}} : e^{i\sqrt{4\pi}\phi} : . \quad (2.97)$$

Sul sottospazio fisico (cfr.(2.72) e(2.73)) M si semplifica ed abbiamo

$$M|fisico\rangle = -\frac{e^{iq}}{L} N_0[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}]|fisico\rangle . \quad (2.98)$$

N_0 indica che l'ordinamento è fatto in base a operatori di massa nulla: il campo scalare ϕ in visuale di interazione non ha massa: passando in visuale di Schrödinger si vede che viene generata dinamicamente dall'interazione la massa di Schwinger μ , come si può vedere dall'Hamiltoniana (2.56).

Nel modello di Schwinger massivo, il termine di massa introduce un'autointerazione del campo ϕ che cambia la massa fisica dal valore μ a μ_1 . Il vuoto è ora definito in base al nuovo parametro μ_1 e diventa necessario ordinare $e^{i\sqrt{4\pi}\phi}$ rispetto alla massa effettiva.

In appendice B è riportato il conto che porta alla relazione tra gli ordinamenti normali

$$N_0[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}] = B(\mu L)N_\mu[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}],$$

$$B(z) = \frac{z}{4\pi} \exp \left\{ \gamma + \frac{\pi}{z} - 2 \int_1^\infty \frac{du}{(e^{uz} - 1)\sqrt{u^2 - 1}} \right\}. \quad (2.99)$$

L'operatore di massa cambia di conseguenza in

$$M = -\frac{1}{L}C_-^\dagger C_+ e^{iq} e^{i\frac{2\pi}{L}x\bar{p}} B(\mu_1 L)N_{\mu_1}[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}],$$

$$M|fisico\rangle = -\frac{e^{iq}}{L}B(\mu_1 L)N_{\mu_1}[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}]|fisico\rangle. \quad (2.100)$$

Il nuovo vuoto è ora definito da

$$|\Omega\rangle = |\theta\rangle \otimes |\Omega_{\mu_1}\rangle \quad (2.101)$$

$$\langle \Omega_{\mu_1} | N_{\mu_1}[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}] | \Omega_{\mu_1} \rangle = 1,$$

dove $|\Omega_{\mu_1}\rangle$ è il vuoto del campo ϕ rispetto alla nuova massa μ_1 e $|\theta\rangle$ è il vuoto, da determinarsi, legato a H_0 .

Sottintenderemo nel seguito che $|\theta\rangle$ rappresenti implicitamente lo stato (2.101).

Scriviamo per $|\theta\rangle$ uno sviluppo analogo a quello (2.91) del modello senza massa:

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-in\theta} \int dp_W |p_W, n\rangle f(p_W) e^{2\pi in p_W} \quad (2.102)$$

$$\int dp_W |f(p_W)|^2 = 1.$$

L'azione dell'operatore M sui vuoti θ è

$$M|\theta\rangle = -\frac{e^{iq}}{L} B(\mu_1 L) |\theta\rangle = -\frac{B(\mu_1 L)}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-in\theta} \int dp_W f(p_W) e^{2\pi i n p_W} e^{iq} |p_W, n\rangle \quad (2.103)$$

e calcoliamo infine la proiezione sullo stato $|p'_W, n'\rangle$

$$\begin{aligned} \langle p'_W, n' | M | \theta \rangle &= -\frac{B(\mu_1 L)}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \int dp_W e^{-in\theta + 2\pi i n p_W} f(p_W) \langle p'_W, n' | e^{iq} | p_W, n \rangle \\ &= -\frac{B(\mu_1 L)}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \int dp_W e^{-in\theta + 2\pi i n p_W} f(p_W) \delta(p'_W - p_W) \delta_{n', n+1} \\ &= -\frac{B(\mu_1 L)}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(n'-1)\theta + 2\pi i (n'-1)p'_W} f(p'_W) \\ &= -\frac{B(\mu_1 L)}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i\theta - 2\pi i p'_W}) e^{-i(n')\theta + 2\pi i (n')p'_W} f(p'_W). \end{aligned} \quad (2.104)$$

2.3.1 Rottura della simmetria del vuoto

Il vuoto θ del modello di Schwinger ha la struttura di una circonferenza di stati equivalenti. Il termine di massa H_m introduce una rottura soffice della simmetria chirale e porta ad una rottura anche della simmetria degli stati θ . Torniamo per un momento al modello di Schwinger senza massa e calcoliamo il valore di aspettazione dell'operatore M : osserviamo che in queste ipotesi la massa rispetto a cui definiamo il normal ordering è proprio la massa di Schwinger μ e l'autofunzione dello stato di vuoto $f(p_W)$ è la $u(p_W)$ ricavata in precedenza. Inserendo nella (2.104) la forma esplicita (2.87) otteniamo

$$\langle M \rangle_\theta = \frac{\langle \theta | M | \theta \rangle}{\langle \theta | \theta \rangle} = -\frac{B(\mu L)}{L} e^{-\frac{\pi}{\mu L}} e^{i\theta}. \quad (2.105)$$

Il condensato chirale $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta$ è facile ora da calcolare:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta = \langle M + M^\dagger \rangle_\theta = \langle M \rangle_\theta + \langle M \rangle_\theta^* \quad (2.106)$$

$$= -\frac{B(\mu L)}{L} e^{-\frac{\pi}{\mu L}} 2 \cos(\theta). \quad (2.107)$$

L'introduzione di un termine di massa $m\bar{\psi}\psi$ nell'Hamiltoniana rompe quindi la simmetria degli stati θ , poichè ora H_{tot} contiene una dipendenza esplicita dall'angolo di vuoto.

Dalla (2.107) si vede che il minimo di energia è per $\theta = 0$ e questo valore dell'angolo corrisponde ad uno stato di vuoto stabile. Gli stati $\theta \neq 0$ sono stati instabili in presenza di un termine di massa dell'Hamiltoniana totale.

Per $\theta = 0$, nel limite di decompattificazione ritroviamo il risultato del modello di Schwinger sul piano[5]:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta \longrightarrow -\frac{\mu}{2\pi} e^\gamma \cos(\theta). \quad (2.108)$$

2.4 Calcolo numerico del condensato chirale

Come già per il modello senza massa, possiamo ricondurre la determinazione dello stato di vuoto di $H_0 + H_m$ ad una equazione di Schrödinger unidimensionale nella coordinata p_W .

Proiettiamo dunque sullo stato $|p'_W, n' \rangle$ l'azione dell'Hamiltoniana di massa su uno stato $|\theta \rangle$ (2.102):

$$\begin{aligned} & \langle p'_W, n' | H_m | \theta \rangle = \\ & = \int_0^L dx m \langle p'_W, n' | M + M^\dagger | \theta \rangle \\ & = -mB(\mu_1 L) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n \int dp_W e^{-in\theta + 2\pi i n p_W} f(p_W) \langle p'_W, n' | e^{iq} + e^{-iq} | p_W, n \rangle \\ & = -mB(\mu_1 L) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{i\theta - 2\pi i p'_W} + e^{-i\theta + 2\pi i p'_W}) e^{-i(n')\theta + 2\pi i(n')p'_W} f(p'_W) \\ & = -\frac{2mB(\mu_1 L)}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(\theta - 2\pi p'_W) e^{-i(n')\theta + 2\pi i(n')p'_W} f(p'_W). \end{aligned} \quad (2.109)$$

L'equazione agli autovalori che determina lo stato di vuoto

$$H_0 + H_m | \theta \rangle = E | \theta \rangle \quad (2.110)$$

diventa

$$\left[-\frac{d^2}{dp_W^2} + V(p_W) \right] f(p_W) = \varepsilon f(p_W) \quad (2.111)$$

con

$$V(p_W) = \omega^2 p_W^2 - \kappa \cos(\theta - 2\pi p_W) \quad (2.112)$$

$$\omega = \pi\mu L, \quad \kappa = 4\pi m L B(\mu_1 L). \quad (2.113)$$

Per integrare la (2.111) è necessario conoscere il potenziale $V(p_W)$. I parametri che lasciamo liberi sono la temperatura T , la massa del fermione m , la massa del bosone di Schwinger μ e l'angolo di vuoto θ .

La frequenza di oscillatore armonico ω è determinata dalla scelta dei parametri, mentre l'ampiezza κ del termine in coseno contiene la massa fisica μ_1 del campo ϕ in visuale di Schrödinger.

Possiamo dare una stima della massa μ_1 espandendo il termine di massa H_m dell'Hamiltoniana in potenze del campo ϕ : per fare questo scriviamo il normal ordering dell'esponenziale in termini dello sviluppo in serie

$$N_{\mu_1}[e^{i\sqrt{4\pi}\phi}] = N_{\mu_1}\left[\sum_n \frac{(i\sqrt{4\pi}\phi)^n}{n!}\right] = 1 + i\sqrt{4\pi}\phi - 2\pi N_{\mu_1}[\phi^2] + \dots \quad (2.114)$$

e calcoliamo H_m nello stato di vuoto utilizzando la (2.109):

$$\langle \theta | H_m | \theta \rangle = \int_0^L dx -\frac{2mB(\mu_1 L)}{L} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f (1 + i\sqrt{4\pi}\phi - 2\pi N_{\mu_1}[\phi^2] + \dots) \quad (2.115)$$

Il termine costante non contribuisce alla dinamica di ϕ .

I termini di ordine ϕ sono nulli, perchè ϕ non contiene modi nulli e quindi $\int \phi = 0$.

I termini quadratici in ϕ danno

$$\frac{4\pi m B(\mu_1 L)}{L} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f \int_0^L dx N_{\mu_1}[\phi^2], \quad (2.116)$$

dove abbiamo indicato la media di una funzione G sullo stato $f(p_W)$ con

$$\langle G(p_W) \rangle_f = \int dp_W G(p_W) |f(p_W)|^2. \quad (2.117)$$

Confrontando con l'espressione di H_ϕ in (2.56), vediamo che al termine di massa per ϕ si aggiunge la (2.116):

$$\int_0^L dx \frac{\mu^2}{2} N_{\mu_1}[\phi^2] + \int_0^L dx \frac{4\pi m B(\mu_1 L)}{L} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f N_{\mu_1}[\phi^2] =: \int_0^L dx \frac{\mu_1^2}{2} N_{\mu_1}[\phi^2], \quad (2.118)$$

da cui la nuova massa è definita (al secondo ordine in ϕ) dalla relazione

$$\mu_1^2 = \mu^2 + \frac{8\pi m B(\mu_1 L)}{L} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f. \quad (2.119)$$

Questa relazione deve essere risolta in modo autoconsistente assieme all'equazione di Schrödinger (2.111).

2.4.1 Andamenti asintotici

E' possibile dare una stima dello stato di vuoto con procedimenti analitici nei casi limite in cui uno dei due termini del potenziale $V(p_W)$ prevale sull'altro. In base alla (2.113) e alla (2.99) l'ampiezza κ è

$$\kappa = \begin{cases} e^\gamma m \mu_1 L^2 & \text{per } \mu_1 L \gg 1 \\ 4\pi m L & \text{per } \mu_1 L \ll 1. \end{cases} \quad (2.120)$$

Nelle condizioni

$$\frac{m}{\mu} \ll 1 \ll \mu L = \frac{\mu}{T} \quad \text{basse temperature} \quad (2.121)$$

$$\frac{m}{\mu} \ll \mu L = \frac{\mu}{T} \ll 1 \quad \text{alte temperature} \quad (2.122)$$

il termine armonico prevale su quello in coseno $\omega^2 \gg \kappa$ e lo stato fondamentale asintotico è dato dalla

$$f_{as}(p_W) = u(p_W) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\omega p_W^2}{2}}. \quad (2.123)$$

Le (2.121) e (2.122) esprimono le condizioni di basse e alte temperature nell'ipotesi di perturbazione di massa $m \ll \mu$: è a questo che siamo interessati, poichè saranno le stesse condizioni che riusciremo a riprodurre con la tecnica funzionale del capitolo 3.

Il valore medio del coseno sullo stato di vuoto asintotico f_{as} è

$$\langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_{f_{as}} = e^{-\frac{\pi}{\mu L}} \cos \theta \quad (2.124)$$

e ricaviamo da questa la correzione alla massa per $T \rightarrow 0$

$$\mu_1 = \sqrt{\mu^2 + (me^\gamma \cos \theta)^2} + me^\gamma \quad (2.125)$$

e per $T \rightarrow \infty$

$$\mu_1^2 = \mu^2 + \frac{8\pi m}{L} e^{-\pi/\mu L} \cos \theta . \quad (2.126)$$

Utilizzando la (2.104), il condensato chirale è dato dal valore di aspettazione

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta &= \langle M + M^\dagger \rangle_\theta \\ &= -\frac{2}{L} B(\mu_1 L) \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f \end{aligned} \quad (2.127)$$

e quindi abbiamo ottenuto i due valori limite in ipotesi di perturbazione di massa

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta = -\frac{e^\gamma}{2\pi} \mu \cos \theta \quad \text{per } T \rightarrow 0 , \quad (2.128)$$

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta = -2T e^{-\frac{\pi T}{\mu}} \cos \theta \quad \text{per } T \rightarrow \infty . \quad (2.129)$$

Nel caso in cui invece la massa m sia molto maggiore di μ , il termine in coseno domina su quello armonico; tuttavia non si può trascurare la parte in ω^2 , perchè elimina la degenerazione del potenziale periodico del coseno. Ad alta temperatura abbiamo che $\omega^2/\kappa = \pi\mu^2/4mT$ ed entrambi i coefficienti diventano piccoli: in questo limite un buon metodo è quello di trattare il termine in coseno come una perturbazione e si ottiene [11]:

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \mu^2 + 8m^2 \\ \langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta &= -\frac{2m}{\pi} , \end{aligned} \quad (2.130)$$

che mostra come il condensato cresca linearmente con la massa.

2.4.2 Risoluzione numerica

Nelle regioni dei parametri intermedie rispetto alle (2.121) e (2.122) ricorriamo alla risoluzione numerica delle due equazioni accoppiate

$$\begin{cases} \left[-\frac{d^2}{dp_W^2} + V(p_W) \right] f(p_W) = \varepsilon f(p_W) \\ \mu_1^2 = \mu^2 + \frac{8mB(\mu_1 L)}{L} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f . \end{cases} \quad (2.131)$$

Per rendere adimensionali i parametri rispetto ai quali vogliamo calcolare il condensato chirale, normalizziamo le grandezze dimensionali rispetto alla massa di Schwinger e otteniamo le quantità adimensionali

$$\frac{T}{\mu} = \frac{1}{\mu L}, \quad \frac{m}{\mu}, \quad \theta . \quad (2.132)$$

La frequenza ω è già espressa in funzione di questi rapporti; anche κ è adimensionale e lo riscriviamo così

$$\kappa = 4\pi \frac{m}{\mu} \mu L B\left(\frac{\mu_1}{\mu} \mu L\right) . \quad (2.133)$$

L'algoritmo per risolvere le equazioni (2.131) è la ricerca di punto fisso per la mappa:

$$\kappa_{in} \longrightarrow V(p_W) \longrightarrow f(p_W) \longrightarrow \mu_1 \longrightarrow \kappa_{fi} ,$$

che descrive la procedura di risoluzione: scelto un valore iniziale κ_{in} per l'ampiezza κ , otteniamo la forma del potenziale V . Risolviamo a questo punto numericamente¹ l'equazione di Schrödinger (2.131) e troviamo l'autofunzione $f(p_W)$ di energia minima. Possiamo ora calcolare la correzione di massa μ_1 :

$$\begin{aligned} \mu_1^2 L^2 &= \mu^2 L^2 + 8\pi m L B(\mu_1 L) \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f \\ &= \mu^2 L^2 + 2\kappa_{in} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f \end{aligned} \quad (2.134)$$

e ricalcoliamo infine l'ampiezza κ

$$\kappa_{fi} := 4\pi \frac{m}{\mu} \mu L B\left(\sqrt{\mu^2 L^2 + 2\kappa_{in} \langle \cos(\theta - 2\pi p_W) \rangle_f}\right) . \quad (2.135)$$

¹in appendice D è riportato il listato Fortran del programma utilizzato. La risoluzione dell'equazione differenziale è stata fatta con l'algoritmo di Numerov.

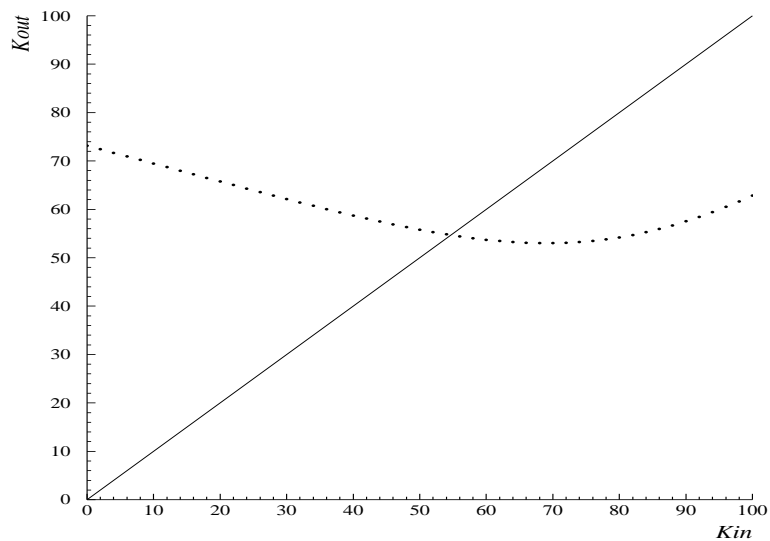


Figura 2.1: Esempio di ricerca di punto fisso. Parametri: $m/\mu = 0.3$, $T/\mu = 0.1$, $\theta = \pi$

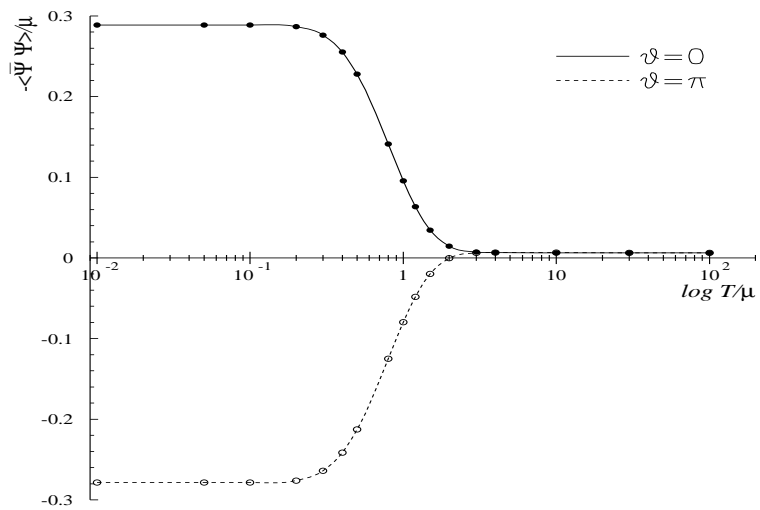


Figura 2.2: Condensato chirale per $m/\mu = 0.01$

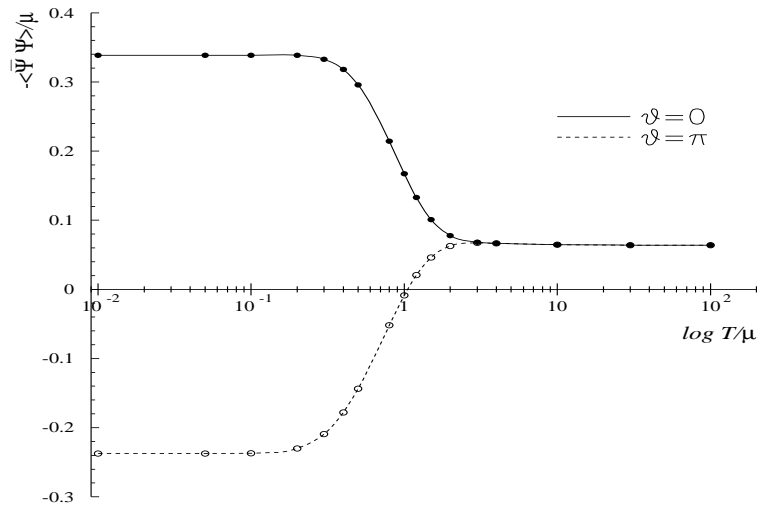


Figura 2.3: Condensato chirale per $m/\mu = 0.1$

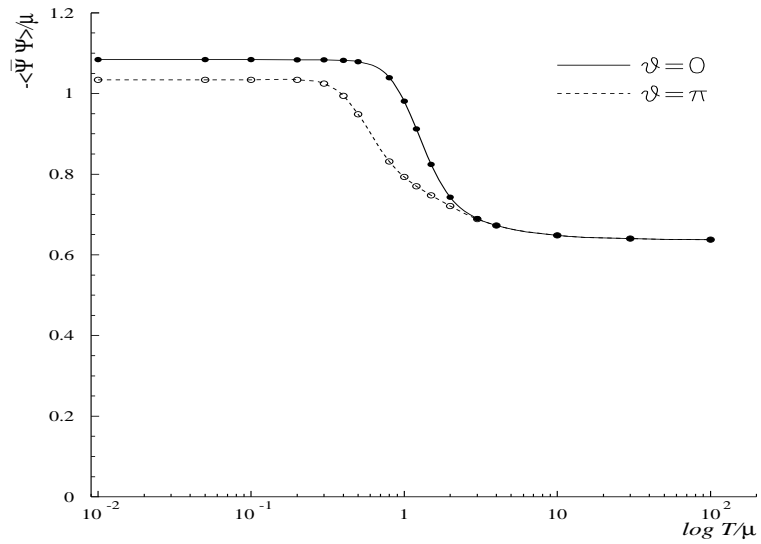


Figura 2.4: Condensato chirale per $m/\mu = 1$

Capitolo 3

Il modello di Schwinger sul toro e sul cilindro -approccio funzionale-

3.1 L'azione euclidea e la struttura del campo di gauge

L'azione sul toro bidimensionale del modello di Schwinger euclideo è

$$S = \int_{\mathcal{T}} d^2x \left\{ \frac{1}{2} E^2(x) - \bar{\psi}(x) i \mathcal{D} \psi(x) \right\}, \quad (3.1)$$

dove

$$E(x) = F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 ,$$
$$\mathcal{D} = \gamma_\mu (\partial_\mu + ig A_\mu).$$

La varietà \mathcal{T} su cui sono definiti i campi ha la struttura semplice di prodotto di due circonferenze

$$\mathcal{T} = S^1 \times S^1 .$$

La metrica su questo toro è quella elementare del piano euclideo ristretta al rettangolo $[0, \beta] \times [0, L]$ e le coordinate soddisfano a $t \in [-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}]$ e $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$. L'origine è posta al centro del rettangolo per evitare problemi di bordo nelle integrazioni (questa è infatti spesso un punto singolare) e in modo da recuperare in maniera naturale i risultati sul cilindro ($L \rightarrow \infty$) e sul piano ($L \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$).

I campi fermionici e di gauge devono obbedire ad opportune condizioni di periodicità imposte dalla struttura del toro \mathcal{T} : in generale avremo che i campi nei punti omologhi sono legati da

$$\begin{aligned}\psi(x + L_\nu) &= \Lambda_\nu(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x + L_\nu) &= \bar{\psi}(x)\Lambda_\nu^{-1}(x), \\ A_\mu(x + L_\nu) &= A_\mu(x) - \frac{i}{g}\Lambda_\nu^{-1}(x)\partial_\mu\Lambda_\nu(x),\end{aligned}$$

dove $L_0 = (\beta, 0)$ e $L_1 = (0, L)$.

Le condizioni sopra espresse garantiscono che venga rispettata l'invarianza di gauge della teoria; richiediamo in più che le funzioni di transizione $\Lambda_\mu(x)$ soddisfino le condizioni di cociclo

$$\Lambda_\mu(x)\Lambda_\nu(x + L_\mu) = \Lambda_\nu(x)\Lambda_\mu(x + L_\nu).$$

Con questi requisiti ogni scelta del campo di gauge A_μ appartiene ad un settore topologico (classe di Chern) etichettato dall'indice di Pontryagin o carica topologica k definita da

$$k = \frac{g}{2\pi} \int_{\mathcal{T}} E(x) d^2x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

Per ogni settore topologico \mathcal{A}^k scomponiamo il campo di gauge così :

$$A = \mathcal{J} + d\alpha + \delta\phi + h, \quad (3.3)$$

dove \mathcal{J} è l'istantone e gli altri termini sono la decomposizione di Hodge della parte di A continua e a singolo valore: $d\alpha$ è la componente esatta e corrisponde ad una pura gauge; $\delta\phi$ è la parte coesatta (rotore) e h è il termine armonico ($\Delta h = 0 \Rightarrow h = \text{cost.}$).

Riscriviamo l'equazione (3.3) sviluppandola sulla base delle 1-forme:

$$A_\mu^{(k)}(x) = \mathcal{J}_\mu^{(k)}(x) + \partial_\mu \alpha(x) + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) + h_\mu. \quad (3.4)$$

Da questa si puo' vedere che l'intensità totale $E(x) = F_{01}(x)$ del campo di gauge e quella \tilde{E} del solo istantone sono legate da

$$E = \tilde{E} - \Delta \phi. \quad (3.5)$$

Definiamo quindi il campo scalare $\phi(x)$

$$\phi(x) = -\frac{1}{\Delta} \left(E(x) - \frac{2\pi k}{gV} \right) + \text{cost.} \quad (3.6)$$

ed inserendo (3.6) in (3.2) otteniamo

$$\tilde{E} = \frac{2\pi k}{gV}. \quad (3.7)$$

L'istantone $\mathcal{J}_\mu^{(k)}$ ha un'intensità di campo costante e scegliamo di rappresentarlo con la funzione

$$\mathcal{J}_\mu^{(k)} = \begin{cases} -\frac{2\pi k}{gV} x & \text{per } \mu = 0 \\ 0 & \text{per } \mu = 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Al variare di k , $\mathcal{J}_\mu^{(k)}$ porta con sè tutta la carica topologica del campo di gauge.

La costante aggiunta in (3.6) tiene conto che il laplaciano Δ è invertibile sul toro \mathcal{T} a meno di una costante arbitraria: è per questo motivo che abbiamo sottratto il modo nullo $\frac{2\pi k}{gV}$ alla funzione $E(x)$.

Se imponiamo che ϕ sia ortogonale al nucleo di Δ

$$\int_{\mathcal{T}} \phi(x) d^2x = 0, \quad (3.9)$$

la corrispondenza tra $E(x)$ e la coppia $\{k, \phi\}$ è biunivoca (cfr. (3.6)).

Il termine armonico h_μ è una coppia di costanti, dette anche 'torone' e indicata in letteratura con t_μ .

L'importanza di questi gradi di libertà è chiara se calcoliamo la loop di Wilson di A_μ : nel settore topologico banale $k = 0$, tenendo conto solo delle componenti armoniche di A_μ , abbiamo

$$e^{ig \int A_\mu dx_\mu} = e^{ig(\beta h_0 n_0 + L h_1 n_1)}, \quad (3.10)$$

per circuiti che si avvolgono sul toro n_0 volte lungo la direzione temporale e n_1 volte lungo quella spaziale.

I valori di h_μ sono in corrispondenza 1 a 1 con i fattori di fase (3.10) se imponiamo il vincolo

$$0 \leq h_0 < \frac{2\pi}{g\beta}, \quad , \quad 0 \leq h_1 < \frac{2\pi}{gL}. \quad (3.11)$$

Da $\partial_\mu A_\mu = \Delta\alpha$ si vede che c'è corrispondenza biunivoca tra la divergenza del campo di gauge e $\alpha(x)$ se richiediamo

$$\int_{\mathcal{T}} \alpha(x) d^2x = 0. \quad (3.12)$$

Riassumendo, abbiamo visto come la corrispondenza

$$A_\mu \iff \{k, \phi, \alpha, h_\mu\} \quad (3.13)$$

sia biunivoca se richiediamo che le nuove variabili in cui abbiamo scomposto il campo di gauge soddisfino ai seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} \phi(x) d^2x &= 0 & = \int_{\mathcal{T}} \alpha(x) d^2x \\ 0 \leq h_0 < \frac{2\pi}{g\beta} & , & 0 \leq h_1 < \frac{2\pi}{gL} \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2 L'operatore di Dirac sul toro

L'operatore di Dirac definito da

$$i\mathcal{D} = i\gamma_\mu(\partial_\mu + igA_\mu) \quad (3.15)$$

è un operatore hermitiano sullo spazio degli spinori a due componenti, con il prodotto scalare

$$\langle \psi | \chi \rangle = \int_{\mathcal{T}} d^2x \bar{\psi}(x) \chi(x), \quad (3.16)$$

dove lo spinore ψ è dato da

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

ed il corrispondente $\bar{\psi}$ è definito da

$$\bar{\psi}(x) = (\psi_1^*(x), \psi_2^*(x)).$$

$i\mathcal{D}$ è un operatore ellittico sulla varietà compatta \mathcal{T} e quindi il suo spettro è discreto[3]. Ogni spinore ammette una decomposizione unica su una base di autofunzioni di $i\mathcal{D}$.

Lo spettro è reale e simmetrico rispetto all'autovalore 0: infatti per ogni autofunzione ψ_n

$$i\mathcal{D}\psi_n = E_n\psi_n, \quad (3.17)$$

poichè $i\mathcal{D}$ anticommute con la matrice γ_5 , lo spinore $\psi_{-n} = \gamma_5\psi_n$ è un'autofunzione relativa all'autovalore $E_{-n} = -E_n$:

$$i\mathcal{D}\psi_{-n} = -\gamma_5 i\mathcal{D}\psi_n = -\gamma_5 E_n \psi_n = E_{-n} \psi_{-n}. \quad (3.18)$$

3.2.1 Nucleo di $i\mathcal{D}$

I modi nulli dell'operatore di Dirac risolvono l'equazione omogenea

$$i\mathcal{D}\chi(x) = 0. \quad (3.19)$$

Poichè $\{i\mathcal{D}, \gamma_5\} = 0$, γ_5 lascia invariato il nucleo di $i\mathcal{D}$ e possiamo scegliere una base di $\ker(i\mathcal{D})$ fatta di autostati di γ_5 ; avremo quindi modi nulli con chiralità definita:

$$\gamma_5\chi(x) = \pm\chi(x). \quad (3.20)$$

Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer [3, 4] stabilisce che le dimensioni del nucleo di $i\mathcal{D}$ sono legate alla carica topologica del campo di gauge A_μ e vale

$$\dim \ker i\mathcal{D} = |k| , \quad (3.21)$$

dove k è l'indice di Pontryagin associato a A_μ . Inoltre per $k < 0$ i modi nulli hanno tutti chiralità positiva, mentre per $k > 0$ hanno tutti chiralità negativa: indichiamo con $n = n_+ + n_-$ il numero totale di modi nulli, dove n_+ e n_- contano rispettivamente il numero di modi con chiralità positiva e negativa. La tabella seguente riassume i casi possibili

	n_+	n_-
$k \geq 0$	0	$ k $
$k \leq 0$	$ k $	0

Notiamo che solo nel settore topologico banale $k = 0$ l'operatore $i\mathcal{D}$ non ha modi nulli ed è direttamente invertibile.

3.2.2 Sviluppo in autofunzioni

Dato un generico spinore $\psi(x)$, possiamo scrivere il suo sviluppo su una base di autofunzioni di $i\mathcal{D}$: le χ indicano gli eventuali modi nulli e le ψ i modi eccitati.

Per $|k| \geq 1$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{|k|} a_i \chi_i(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi_n(x) , \quad (3.22)$$

per $k = 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi_n(x) . \quad (3.23)$$

3.3 Quantizzazione con integrali di cammino

Il funzionale generatore per le funzioni di correlazione è dato dalla formula dell'integrale di cammino

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A] + \int d^2x \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + J_\mu A_\mu}, \quad (3.24)$$

dove le sorgenti $\bar{\eta}$ e η sono variabili di Grassmann e J_μ è una corrente c-numero.

Lo sviluppo del campo ψ è quello di (3.22), dove le autofunzioni χ_i e ψ_n sono spinori a 2 componenti complesse, mentre i coefficienti a_i e b_n sono variabili di Grassmann.

Scegliamo per il campo ψ lo sviluppo

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{i=1}^{|\kappa|} \bar{a}_i \bar{\chi}_i(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_n \bar{\psi}_n(x), \quad (3.25)$$

dove l'operatore barra agisce nel seguente modo

$$\bar{a}_i = a_i^*, \quad (3.26)$$

$$\bar{\chi}_i = (\chi_i^*)^T. \quad (3.27)$$

Il prodotto scalare è la forma bilineare definita da

$$(\bar{\psi}, \psi) = \int d^2x \bar{\psi}(x) \psi(x) = \sum_i \bar{a}_i a_i + \sum_n \bar{b}_n b_n, \quad (3.28)$$

dove abbiamo usato l'ortogonalità delle autofunzioni dell'operatore di Dirac (cfr.(3.16))

$$\int d^2x \bar{\psi}_i(x) \psi_j(x) = \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (3.29)$$

La costante di normalizzazione \mathcal{N} in (3.24) è scelta in modo che $Z[0, 0, 0] = 1$.

Il valor medio nel vuoto di un osservabile $\Omega(A, \psi, \bar{\psi})$ è dato dalla formula

$$\langle \Omega(A, \psi, \bar{\psi}) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]} \Omega(A, \psi, \bar{\psi}). \quad (3.30)$$

Poichè i settori topologici k sono classi di equivalenza per il campo di gauge, scomponiamo la misura funzionale $\mathcal{D}A$ in una serie sui settori topologici

$$\mathcal{D}A \longrightarrow \sum_k \mathcal{D}A^{(k)}$$

e per ogni k è fissata la configurazione di istantone, come in (3.8).

Riscriviamo il valore medio di $\Omega(A, \psi, \bar{\psi})$

$$\langle \Omega(A, \psi, \bar{\psi}) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_k \int_{A^{(k)}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A^{(k)} e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]} \Omega(A, \psi, \bar{\psi}) . \quad (3.31)$$

La funzione di partizione è

$$Z = \sum_k \int_{A^{(k)}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A^{(k)} e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]} \quad (3.32)$$

ed è facile vedere che a Z contribuisce solo il settore topologico banale: esplicitiamo la misura funzionale fermionica in base alla (3.22)

$$\mathcal{D}\psi = \mathcal{D}a \mathcal{D}b = \prod_{i=1}^{|k|} da_i \prod_n db_n . \quad (3.33)$$

Ricordiamo che ad ogni differenziale di Grassmann da_i o db_n deve corrispondere una ed una sola copia della variabile associata a_i o b_n , altrimenti in base alle regole di integrazione di Berezin, l'integrale è nullo:

$$\int da = 0, \quad \int da a = 1, \quad \int da a^2 = 0 .$$

Osserviamo ora che l'esponenziale dell'azione euclidea S_E non fornisce nessun coefficiente di modo nullo a_i , perchè l'azione fermionica è il prodotto scalare

$$\int d^2x \bar{\psi} i \not{D} \psi = (\bar{\psi}, i \not{D} \psi)$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \left(\sum_i \bar{a}_i \bar{\chi}_i + \sum_n \bar{b}_n \bar{\psi}_n, i \not{D} (\sum_j a_j \chi_j + \sum_m b_m \psi_m) \right) = \\ & \left(\sum_i \bar{a}_i \bar{\chi}_i + \sum_n \bar{b}_n \bar{\psi}_n, \sum_m b_m i \not{D} \psi_m \right) = \\ & \left(\sum_i \bar{a}_i \bar{\chi}_i + \sum_n \bar{b}_n \bar{\psi}_n, \sum_m b_m E_m \psi_m \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \bar{b}_n b_m E_m(\bar{\psi}_n, \psi_m) &= \\ \sum_n E_n \bar{b}_n b_n . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Questo comporta che la misura funzionale (3.33) dà un risultato non nullo nella funzione di partizione (3.32) solo se il numero di modi nulli è zero. L'unico contributo viene dal settore topologico banale $k = 0$ e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Z &= \int_{A^{(0)}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A^{(0)} e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]} \\ &= \int_{A^{(0)}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A^{(0)} e^{-S[A]} e^{\int d^2x \bar{\psi} i \mathcal{D} \psi} \\ &= \int_{A^{(0)}} \mathcal{D}A^{(0)} e^{-S[A]} \det(i\mathcal{D}) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Il determinante fermionico $\det(i\mathcal{D})$ dipende dal campo di gauge e dal settore topologico in base alla definizione dell'operatore $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$.

Alla luce di quanto appena visto, riprendiamo la discussione del valore di aspettazione di un operatore $\Omega(A, \psi, \bar{\psi})$: dalla (3.31) si vede che avremo contributi da settori topologici $k \neq 0$ solo se $\Omega(A, \psi, \bar{\psi})$ fornisce qualche modo nullo di $i\mathcal{D}$.

In particolare, per tutti gli osservabili $\Omega(A)$ costruiti con il solo campo di gauge avremo

$$\langle \Omega(A) \rangle = \frac{1}{Z} \int_{A^{(0)}} \mathcal{D}A^{(0)} e^{-S[A]} \det(i\mathcal{D}) \Omega(A) . \quad (3.36)$$

3.3.1 Funzioni di correlazione fermioniche con campo esterno

Fissiamo il campo di gauge $A_\mu^{(k)}$ e lo consideriamo quindi come campo esterno. Il funzionale generatore (3.24) prende la forma

$$Z[A^{(k)}; \eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int d^2x \bar{\psi} i \mathcal{D} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi} . \quad (3.37)$$

Il termine di sorgente è in grado di fornire modi nulli di $i\mathcal{D}$, pertanto $Z[A^{(k)}; \eta, \bar{\eta}]$ riceve contributi da ogni settore topologico k .

Scomponiamo il termine di sorgente in modi nulli e modi eccitati:

$$(\bar{\eta}, \psi) = \sum_i (\bar{\eta}, \chi_i) a_i + \sum_n (\bar{\eta}, \psi_n) b_n, \quad (3.38)$$

$$(\bar{\psi}, \eta) = \sum_i \bar{a}_i(\bar{\chi}_i, \eta) + \sum_n \bar{b}_n(\bar{\psi}_n, \eta). \quad (3.39)$$

Integriamo subito la parte di modi nulli, poichè l'azione non dipende da essi

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{a}\mathcal{D}a e^{\sum_i (\bar{\eta}, \chi_i) a_i + \bar{a}_i(\bar{\chi}_i, \eta)} = \\ & \int \mathcal{D}\bar{a}\mathcal{D}a \prod_{i=1}^{|\kappa|} e^{(\bar{\eta}, \chi_i) a_i} e^{\bar{a}_i(\bar{\chi}_i, \eta)} = \\ & \int \prod_{j=1}^{|\kappa|} d\bar{a}_j da_j \prod_{i=1}^{|\kappa|} (1 + (\bar{\eta}, \chi_i) a_i) (1 + \bar{a}_i(\bar{\chi}_i, \eta)) = \\ & \prod_{i=1}^{|\kappa|} (\bar{\eta}, \chi_i) (\bar{\chi}_i, \eta), \end{aligned} \quad (3.40)$$

dove abbiamo usato lo sviluppo dell'esponenziale di variabili di Grassmann

$$e^\theta = \sum_n \frac{\theta^n}{n!} = 1 + \theta,$$

$$\begin{aligned} e^{\bar{\eta}\theta + \bar{\theta}\eta} &= 1 + \bar{\eta}\theta + \bar{\theta}\eta + \frac{(\bar{\eta}\theta + \bar{\theta}\eta)^2}{2} \\ &= 1 + \bar{\eta}\theta + \bar{\theta}\eta + \bar{\eta}\theta\bar{\theta}\eta = (1 + \bar{\eta}\theta)(1 + \bar{\theta}\eta) \\ &= e^{\bar{\eta}\theta} e^{\bar{\theta}\eta} \end{aligned}$$

ed il fatto che i termini $(\bar{\eta}, \chi_i) a_i$ e $\bar{a}_i(\bar{\chi}_i, \eta)$ hanno parità di Grassmann +1.

Passiamo ora all'integrale sui modi eccitati

$$\int \mathcal{D}\bar{b}\mathcal{D}b e^{(\bar{\psi}, i\mathcal{D}\psi) + \sum_n (\bar{\eta}, \psi_n) b_n + \bar{b}_n(\bar{\psi}_n, \eta)} = \int \mathcal{D}\bar{b}\mathcal{D}b e^{\sum_n \bar{b}_n E_n b_n + (\bar{\eta}, \psi_n) b_n + \bar{b}_n(\bar{\psi}_n, \eta)}, \quad (3.41)$$

dove abbiamo fatto uso dell'espansione (3.34) dell'azione del campo fermionico.

Trasliamo i coefficienti b_n e \bar{b}_n per fattorizzare la dipendenza del funzionale dalle sorgenti:

$$\begin{cases} b_n & \longrightarrow b_n - \frac{1}{E_n}(\bar{\psi}_n, \eta) \\ \bar{b}_n & \longrightarrow \bar{b}_n - \frac{1}{E_n}(\bar{\eta}, \psi_n) \end{cases} \quad (3.42)$$

da cui

$$E_n \bar{b}_n b_n + (\bar{\eta}, \psi_n) b_n + \bar{b}_n (\bar{\psi}_n, \eta) \longrightarrow E_n \bar{b}_n b_n - \frac{1}{E_n} (\bar{\eta}, \psi_n) (\bar{\psi}_n, \eta) \quad (3.43)$$

e l'esponentiale della (3.41) si scompone in

$$e^{-\int \bar{\eta}(x) G_e(x, y; A) \eta(y)} \int \mathcal{D}\bar{b} \mathcal{D}b e^{\sum_n E_n \bar{b}_n b_n} = e^{-\int \bar{\eta}(x) G_e(x, y; A) \eta(y)} \det'(i\mathcal{D}), \quad (3.44)$$

dove l'apice in $\det'(i\mathcal{D})$ sta ad indicare che il determinante è calcolato sullo spazio ortogonale ai modi nulli.

La $G_e(x, y; A)$ è la funzione di Green eccitata associata all'operatore $i\mathcal{D}$:

$$G_e(x, y; A) = \sum_n \frac{\psi_n(x) \bar{\psi}_n(y)}{E_n}, \quad (3.45)$$

che soddisfa (cfr. appendice C) all'equazione

$$i\mathcal{D}G_e(x, y; A) = \delta(x - y) - P(x, y), \quad (3.46)$$

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{|k|} \chi_i(x) \bar{\chi}_i(y).$$

In base alle proprietà dello spettro di $i\mathcal{D}$ (cfr. (3.18)), la $G_e(x, y; A)$ anti-commuta con la matrice γ_5

$$\begin{aligned} \gamma_5 G_e(x, y; A) &= \gamma_5 \sum_n \frac{\psi_n(x) \bar{\psi}_n(y)}{E_n} = \sum_n \frac{\psi_{-n}(x) \bar{\psi}_n(y)}{E_n} \\ &= \sum_n \frac{\psi_{-n}(x) \bar{\psi}_{-n}(y)}{E_n} \gamma_5 = - \sum_n \frac{\psi_{-n}(x) \bar{\psi}_{-n}(y)}{E_{-n}} \gamma_5 \\ &= -G_e(x, y; A) \gamma_5 \end{aligned} \quad (3.47)$$

e quindi la $G_e(x, y; A)$ è rappresentata da una matrice fuori diagonale: infatti in due dimensioni la condizione

$$\{M, \gamma_5\} = 0$$

implica

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m_{11} & 0 \\ 0 & 2m_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Riunendo i vari termini, riscriviamo il funzionale generatore con campo esterno

$$Z[A^{(k)}; \eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \prod_{i=1}^{|k|} (\bar{\eta}, \chi_i)(\bar{\chi}_i, \eta) e^{-\int \bar{\eta}(x) G_e(x, y; A) \eta(y)} \det'(i\mathcal{D}). \quad (3.48)$$

Le funzioni di correlazione si ricavano da $Z[A^{(k)}; \eta, \bar{\eta}]$ tramite derivazione funzionale rispetto alle sorgenti

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi} i\mathcal{D}\psi} \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_n}(x_n) \bar{\psi}_{\beta_n}(y_n) = \\ & \frac{\delta^{2n}}{\delta\eta_{\beta_1}(y_1) \delta\bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1) \dots \delta\eta_{\beta_n}(y_n) \delta\bar{\eta}_{\alpha_n}(x_n)} Z[A^{(k)}; \eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ricaviamo ora alcune interessanti caratteristiche delle funzioni fermioniche a 2 punti

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi} i\mathcal{D}\psi} \bar{\psi}_{\alpha}(x) \psi_{\beta}(y) \quad (3.50)$$

I campi $\bar{\psi}_{\alpha}(x) \psi_{\beta}(y)$ forniscono al più un coefficiente di modo nullo a o \bar{a} e quindi la funzione sarà non nulla solo se $i\mathcal{D}$ ha uno o nessun modo nullo.

Calcoliamo esplicitamente la (3.50) usando la forma integrata (3.48) del funzionale generatore $Z[A^{(k)}; \eta, \bar{\eta}]$

$$\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}_{\beta}(y) \delta\eta_{\alpha}(x)} \prod_{i=1}^{|k|} (\bar{\eta}, \chi_i)(\bar{\chi}_i, \eta) e^{-\int \bar{\eta} G_e(A) \eta} \det'(i\mathcal{D}) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \quad (3.51)$$

per $k = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}_\beta(y)\delta\eta_\alpha(x)} e^{-\int \bar{\eta} G_e(A) \eta} \det(i\mathcal{D}) &= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta(y)} e^{-\int \bar{\eta} G_e(A) \eta} \int d^2z \bar{\eta}(z)_\lambda G_{\lambda\alpha}^e(z, x; A) \det(i\mathcal{D}) = \\ &= e^{-\int \bar{\eta} G_e(A) \eta} G_{\beta\alpha}^e(y, x; A) \det(i\mathcal{D}) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = G_{\beta\alpha}^e(y, x; A) \det(i\mathcal{D}) , \end{aligned} \quad (3.52)$$

per $|k| = 1$

$$\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}_\beta(y)\delta\eta_\alpha(x)} (\bar{\eta}, \chi)(\bar{\chi}, \eta) e^{-\int \bar{\eta} G_e(A) \eta} \det'(i\mathcal{D}) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = -\bar{\chi}_\alpha(x) \chi_\beta(y) \det'(i\mathcal{D}) . \quad (3.53)$$

Se calcoliamo ora il valore di aspettazione della densità chirale

$$\bar{\psi} P_\pm \psi = \bar{\psi} \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \psi \quad (3.54)$$

nel settore $k = 0$, troviamo che

$$\langle \bar{\psi} P_\pm \psi \rangle_{k=0} = \det(i\mathcal{D}) \operatorname{tr} G_e(A) = 0 . \quad (3.55)$$

Nel settore topologico banale il condensato è quindi nullo: questo spiega perchè i primi tentativi di risolvere il modello di Schwinger con gli integrali funzionali fallirono nel predire il valore del condensato: in questi approcci venivano infatti trascurati i modi nulli dell'operatore di Dirac.

Poichè in (3.54) ci sono solo due campi fermionici, l'unico contributo alla densità chirale viene dai settori topologici $k \pm 1$:

$$\langle \bar{\psi} P_\pm \psi \rangle = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi} i\mathcal{D}\psi} \bar{\psi} P_\pm \psi = -\operatorname{tr}(\bar{\chi} P_\pm \chi) \det'(i\mathcal{D}) . \quad (3.56)$$

Per calcolare la (3.56) occorre conoscere il determinante fermionico dell'operatore di Dirac nei settori topologici $k \pm 1$ ed i corrispondenti modi nulli.

Il calcolo esplicito di $\det'(i\mathcal{D})$ sul toro è stato fatto con varie tecniche: si veda

[13] per la regolarizzazione alla Pauli-Villars e [6] per la regolarizzazione con la funzione ζ .

Riportiamo qui il risultato di [6] assieme alla definizione delle funzioni Θ di Jacobi e della η di Dedekind che ci saranno utili nel seguito:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi}i\mathcal{D}\psi} \bar{\psi}P_{\pm}\psi = -\frac{1}{\beta}|\Theta_{\pm}|^2 e^{\mp 2\phi} \exp\left(\frac{\mu^2}{2} \int \phi\Delta\phi + \frac{2gk}{V} \int \phi\right) \quad (3.57)$$

$$\det(i\mathcal{D})_{k=0} = \left| \frac{1}{\eta(i\frac{L}{\beta})} \Theta \left[\begin{matrix} 1+h_0 \\ \frac{1}{2}-h_1 \end{matrix} \right] \left(0, i\frac{L}{\beta}\right) \right|^2 \exp\left(\frac{\mu^2}{2} \int \phi\Delta\phi\right) \quad (3.58)$$

$$\Theta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right] \left(z, i\frac{L}{\beta}\right) = \sum_n e^{-\pi\frac{L}{\beta}(n+a)^2 + 2\pi i(n+a)(z+b)} \quad (3.59)$$

$$\eta\left(i\frac{L}{\beta}\right) = e^{-\frac{\pi}{12}\frac{L}{\beta}} \prod_{n>0} (1 - e^{-2\pi n\frac{L}{\beta}}) \quad (3.60)$$

$$\Theta_{\pm} = \Theta \left[\begin{matrix} x^1/L \mp a_0 \\ x^0/\beta \pm a_1 \end{matrix} \right] \left(z, i\frac{L}{\beta}\right) \quad ; \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} + h_0 \\ a_1 = h_1 \end{cases} \quad (3.61)$$

3.4 Condensato chirale libero

Scomponiamo la densità fermionica nelle due densità chirali

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}P_+\psi + \bar{\psi}P_-\psi \quad (3.62)$$

e calcoliamo il valore di aspettazione nel vuoto

$$\langle \bar{\psi}P_{\pm}\psi \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int E^2} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi}i\mathcal{D}\psi} \bar{\psi}(x)P_{\pm}\psi(x)}{\int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int E^2} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi}i\mathcal{D}\psi}}. \quad (3.63)$$

Poichè gli integrandi sono espressi in termini di $\{k, \phi, \alpha, h_{\mu}\}$, facciamo il cambiamento di variabili (3.13) che abbiamo visto essere biunivoco. Per conservare la misura funzionale, dobbiamo calcolare lo Jacobiano del cambio di

variabili e non ci accontentiamo di porre

$$\int \mathcal{D}A \propto \int \mathcal{D}\{k, \phi, \alpha, h_\mu\}, \quad (3.64)$$

perchè lo Jacobiano, quando non costante, è determinante nel pesare le varie configurazioni su cui si integra: in J sono contenute importanti informazioni sulla dinamica dei campi; un esempio è la trasformazione chirale sui fermioni che calcolata con la tecnica di Fujikawa [19] fornisce esplicitamente l'anomalia chirale del modello di Schwinger.

Espandiamo tutti i campi del cambio di variabili in autofunzioni del laplaciano $-\Delta$ sul toro:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{m \neq 0} \phi_m e^{2\pi i(m_0 \frac{t}{\beta} + m_1 \frac{x}{L})}, \quad (3.65)$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{m \neq 0} \alpha_m e^{2\pi i(m_0 \frac{t}{\beta} + m_1 \frac{x}{L})}, \quad (3.66)$$

$$h_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} (h_\mu \sqrt{V}), \quad (3.67)$$

$$A_\mu^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_m A_{\mu,m}^{(k)} e^{2\pi i(m_0 \frac{t}{\beta} + m_1 \frac{x}{L})}, \quad (3.68)$$

dove α e ϕ non hanno modi nulli ($m = (m_0, m_1) = 0$) in accordo con la (3.14).

Il campo di gauge in termini dell'istantone e della decomposizione di Hodge è

$$\begin{cases} A_0^{(k)} = \mathcal{J}_0^{(k)} + \partial_0 \alpha + \partial_1 \phi + h_0 = -\frac{2\pi k}{gV} x + \partial_0 \alpha + \partial_1 \phi + h_0, \\ A_1^{(k)} = \mathcal{J}_1^{(k)} + \partial_1 \alpha - \partial_0 \phi + h_1 = 0 + \partial_1 \alpha - \partial_0 \phi + h_1. \end{cases} \quad (3.69)$$

Nel settore banale $k = 0$ i coefficienti dello sviluppo (3.68) soddisfano a

$$\begin{pmatrix} A_{0,m} \\ A_{1,m} \end{pmatrix} = 2\pi i \begin{pmatrix} \frac{m_0}{\beta} & \frac{m_1}{L} \\ \frac{m_1}{L} & -\frac{m_0}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \phi_m \end{pmatrix}, \quad (m \neq 0) \quad (3.70)$$

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} \\ A_{1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{V} & 0 \\ 0 & \sqrt{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}, \quad (m = 0) \quad (3.71)$$

da cui, per $m \neq 0$

$$dA_{0,m}dA_{1,m} = (2\pi)^2 \left[\left(\frac{m_0}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{m_1}{L} \right)^2 \right] d\alpha_m d\phi_m = \lambda_m d\alpha_m d\phi_m \quad (3.72)$$

e per $m = 0$

$$dA_{0,0}dA_{1,0} = V dh_0 dh_1 . \quad (3.73)$$

Ricordiamo che λ_m è l'autovalore di $-\Delta$

$$\lambda_m = \left(\frac{2\pi}{\beta} m_0 \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} m_1 \right)^2 \quad (3.74)$$

e quindi il cambio di variabili

$$A \longrightarrow \{ \phi, \alpha, h_\mu \} \quad (3.75)$$

ha come Jacobiano

$$J = V \det'(-\Delta) \quad (3.76)$$

e la misura funzionale diventa

$$\int \mathcal{D}A^{(0)} = J \int_0^{\frac{2\pi}{g\beta}} dh_0 \int_0^{\frac{2\pi}{gL}} dh_1 \int \prod_{m \neq 0} d\phi_m d\alpha_m . \quad (3.77)$$

Osserviamo che J è indipendente dalle variabili dinamiche e quindi si fattorizza nella costante di normalizzazione dell'integrale di cammino: i valori di aspettazione nel vuoto non risentono di questo cambio di variabili.

Per i settori topologici $k \neq 0$ separiamo nel campo di gauge la parte di istantone

$$A_\mu^{(k)} = \mathcal{J}_\mu^{(k)} + A_\mu^{(0)} \quad (3.78)$$

e scriviamo

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}A f[A] &= \sum_k \int \mathcal{D}A^{(0)} f[\mathcal{J}^{(k)} + A^{(0)}] = \\ J \sum_k \int_0^{\frac{2\pi}{g\beta}} dh_0 \int_0^{\frac{2\pi}{gL}} dh_1 \int \prod_{m \neq 0} d\phi_m d\alpha_m & f[\mathcal{J}^{(k)} + A^{(0)}(\phi, \alpha, h_\mu)] . \end{aligned} \quad (3.79)$$

A questo punto è necessario specificare l'insieme di configurazioni del campo di gauge su cui integriamo: in particolare dobbiamo evitare di integrare su

campi A_μ che siano connettabili da una trasformazione di gauge. La tecnica di Faddeev-Popov è un metodo efficace che seleziona le orbite di gauge mantenendo l'invarianza di gauge del funzionale generatore Z (cfr. [18]). Di solito però il prezzo che si paga è l'introduzione di campi ausiliari detti *ghosts* di Faddeev-Popov, che hanno relazioni non fisiche tra spin e statistica. Questi nuovi campi non devono pertanto comparire negli stati finali e nelle quantità osservabili.

Nel caso di una teoria abeliana, come il modello di Schwinger, il determinante di Faddeev-Popov in gauge di Lorentz non dipende dai campi dinamici ed esce a fattore nell'integrale funzionale:

$$\Delta[A]_{Faddeev-Popov} = \det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right)_{Lorentz\ gauge} = \det\left(\frac{1}{g}\partial^2\right)_{teoria\ abeliana} \quad (3.80)$$

non è necessario pertanto introdurre i ghost di F.P. e il fissaggio della gauge di Lorentz è di per sè un buon vincolo sui campi A_μ .

Poichè abbiamo scomposto A_μ nella seguente forma

$$A_\mu^{(k)}(x) = \mathcal{J}_\mu^{(k)}(x) + \partial_\mu\alpha(x) + \epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) + h_\mu, \quad (3.81)$$

la gauge di Lorentz corrisponde a

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \implies \partial^2\alpha(x) = 0 \quad (3.82)$$

e dal momento che $\alpha(x)$ non ha modi nulli $\int \alpha = 0$, il fissaggio della gauge porta al vincolo

$$\alpha(x) = 0. \quad (3.83)$$

La parte di pura gauge α di A_μ sparisce completamente e possiamo quindi sopprimere nel seguito l'integrazione in $d\alpha_m$:

$$\int \mathcal{D}A = J \sum_k \int d^2h \int \prod_{m \neq 0} d\phi_m = J \sum_k \int d^2h \int \mathcal{D}\phi. \quad (3.84)$$

Utilizzando la formula (3.57) per le funzioni di correlazione fermioniche con campo esterno ed il cambio di variabili appena discusso, la formula (3.63)

per le densità chirali diventa

$$\langle \bar{\psi} P_{\pm} \psi \rangle = -\frac{1}{\beta} e^{-\frac{2\pi^2}{g^2 V}} \frac{\int d^2 h |\Theta_{\pm}|^2 \int \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma[\phi] \mp g\phi(x)}}{\int d^2 h \left| \frac{1}{\eta} \Theta \right|^2 \int \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma[\phi]}}, \quad (3.85)$$

$$\Gamma[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi (\Delta^2 - \mu^2 \Delta) \phi. \quad (3.86)$$

L'integrale in $\mathcal{D}\phi$ può essere riscritto in forma integrale con l'ausilio di una funzione $j(x)$:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma[\phi] \mp g\phi(x)} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int \phi (\Delta^2 - \mu^2 \Delta) \phi \mp g \int j \phi}, \quad (3.87)$$

dove ci riserviamo di fare il limite $j(x) \rightarrow \delta(x)$.

Completiamo la forma quadratica dell'esponenziale ed otteniamo un integrale gaussiano

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma[\phi]} e^{2g^2 \int j \frac{1}{(\Delta^2 - \mu^2 \Delta)} j}, \quad (3.88)$$

che nel limite $j(x) \rightarrow \delta(x)$ porta al risultato

$$e^{2g^2 K(x,x)} \int \mathcal{D}\phi e^{-\Gamma[\phi]}, \quad (3.89)$$

dove abbiamo indicato con $K(x, x)$ il nucleo dell'operatore differenziale $(\Delta^2 - \mu^2 \Delta)$:

$$K(x, x) = \langle x | \frac{1}{(\Delta^2 - \mu^2 \Delta)} | x \rangle. \quad (3.90)$$

Sfruttando ora le proprietà delle funzioni Θ definite sul toro \mathcal{T}

$$\int d^2 h |\Theta_{\pm}|^2 = \int d^2 h |\Theta|^2 = \sqrt{\frac{\beta}{2L}}, \quad (3.91)$$

otteniamo la forma integrata della (3.85)

$$\langle \bar{\psi} P_{\pm} \psi \rangle = -\frac{|\eta(i\frac{L}{\beta})|^2}{\beta} e^{-\frac{2\pi^2}{g^2 V}} e^{2g^2 K(x,x)}. \quad (3.92)$$

Semplifichiamo ulteriormente questa espressione con l'aiuto della forma esplicita del nucleo $K(x, x)$

$$K(x, y) = \sum_{m \neq 0} \frac{\phi_m(x) \bar{\phi}_m(y)}{\lambda_m^2 + \mu^2 \lambda_m} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{m \neq 0} \frac{\phi_m(x) \bar{\phi}_m(y)}{\lambda_m} - \frac{\phi_m(x) \bar{\phi}_m(y)}{\lambda_m + \mu^2}$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \left(\langle x | \frac{1}{-\Delta} | y \rangle - \langle x | \frac{1}{-\Delta + \mu^2} | y \rangle \right). \quad (3.93)$$

Come si può vedere $K(x, y)$ è la differenza tra il propagatore scalare senza massa e quello massivo.

$$K(x, x) = \frac{1}{V\mu^2} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_m + \mu^2}. \quad (3.94)$$

Calcoliamo separatamente le due serie

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\lambda_m} &= \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m_1^2 + (\frac{Lm_0}{\beta})^2} \\ &= \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{m_1 \neq 0} \frac{1}{m_1^2} + \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{m_0 \neq 0} \sum_{m_1} \frac{1}{m_1^2 + (\frac{Lm_0}{\beta})^2} \\ &= \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{m_0 \neq 0} \frac{\beta\pi}{Lm_0} \coth\left(\frac{\pi L}{\beta} m_0\right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$= \frac{L}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6} + \frac{L\beta}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth(\frac{\pi L}{\beta} n)}{n} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{\lambda_m + \mu^2} &= -\frac{1}{\mu^2} + \sum_m \frac{1}{\lambda_m + \mu^2} \\ &= -\frac{1}{\mu^2} + \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{m_1} \frac{1}{m_1^2 + (\frac{L\mu}{2\pi})^2} + \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{m_0 \neq 0} \sum_{m_1} \frac{1}{m_1^2 + (\frac{Lm_0}{\beta})^2 + (\frac{L\mu}{2\pi})^2} \\ &= -\frac{1}{\mu^2} + \frac{L}{2\mu} \coth\left(\frac{\mu L}{2}\right) + \frac{L\beta}{2\pi} \sum_n \frac{\coth(\frac{\pi L}{\beta} a(n))}{a(n)}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

dove abbiamo usato la formula (cfr.(1.23))

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) \quad (3.98)$$

e la funzione $a(n)$ è definita da

$$a(n)^2 = n^2 + \left(\frac{\beta\mu}{2\pi}\right)^2. \quad (3.99)$$

Riuniamo le due serie che definiscono la $K(x, x)$

$$\mu^2 K(x, x) = -\frac{1}{\mu^2 V} - \frac{1}{2\mu\beta} \coth\left(\frac{\mu L}{2}\right) + \frac{1}{12} \frac{L}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n>0} \left[\frac{\coth\left(\frac{\pi L}{\beta} n\right)}{n} - \frac{\coth\left(\frac{\pi L}{\beta} a(n)\right)}{a(n)} \right]. \quad (3.100)$$

Riscriviamo la prima somma della formula precedente in termini della η di Dedekind

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n} (\coth\left(\frac{\pi L}{\beta} n\right) - 1) = 2 \sum_{n,r>0} \frac{e^{-2\frac{\pi L}{\beta} nr}}{n} = -2 \sum_r \log(1 - e^{-2\frac{\pi L}{\beta} r}) = -\frac{\pi L}{6\beta} - 2 \log \eta\left(i\frac{L}{\beta}\right). \quad (3.101)$$

A questo punto richiamiamo l'espressione della densità chirale che vogliamo calcolare

$$\langle \bar{\psi} P_{\pm} \psi \rangle = -\frac{|\eta(i\frac{L}{\beta})|^2}{\beta} e^{-\frac{2\pi^2}{g^2 V}} e^{2g^2 K(x,x)} ; \quad (3.102)$$

varie cancellazioni hanno luogo: all'interno di $K(x, x)$ si elidono i termini proporzionali a $\frac{L}{\beta}$; la funzione η in $K(x, x)$ si cancella con quella a fattore in (3.102). Analogamente il termine dipendente da V in $K(x, x)$ si cancella con un identico termine a fattore ($\mu^2 = \frac{g^2}{\pi}$).

Infine otteniamo

$$\langle \bar{\psi} P_{\pm} \psi \rangle = -\frac{1}{\beta} e^{-\frac{\pi}{\beta\mu} \coth\left(\frac{L\mu}{2}\right)} e^{J(\beta\mu)} e^{-2H\left(\beta\mu, \frac{L}{\beta}\right)}, \quad (3.103)$$

dove

$$J(x) = \sum_{n>0} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}} \right), \quad (3.104)$$

$$H(x, y) = \sum_{n>0} \frac{1}{\sqrt{n^2 + \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}} \frac{1}{e^{y\sqrt{(2\pi n)^2 + x^2}} - 1}. \quad (3.105)$$

Nel limite di decompattificazione $L \rightarrow \infty$, $H(x, y) \rightarrow 0$ e $\coth\left(\frac{L\mu}{2}\right) \rightarrow 1$: pertanto sul cilindro la (3.103) si semplifica in

$$\langle \bar{\psi} P_{\pm} \psi \rangle = -\frac{1}{\beta} e^{-\frac{\pi}{\beta\mu}} e^{J(\beta\mu)}, \quad (3.106)$$

da cui otteniamo infine il condensato chirale del modello di Schwinger senza massa sul cilindro

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{2}{\beta} e^{-\frac{\pi}{\beta\mu}} e^{J(\beta\mu)} . \quad (3.107)$$

3.5 Vuoti θ in approccio funzionale

Abbiamo visto con la tecnica operatoriale che il modello di Schwinger senza massa ha una degenerazione di stati di vuoto equivalenti.

La formula calcolata nel capitolo 2

$$\langle \bar{\psi} \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \rangle_\theta = -\frac{B(\mu L)}{L} e^{-\frac{\pi}{\mu L}} e^{i\theta}$$

mostra come il vuoto θ sia strettamente legato alla rottura della simmetria chirale: questa proprietà è confermata dall'approccio funzionale.

Per vederlo, scegliamo un generico settore topologico \mathcal{A}^k per il campo di gauge e aggiungiamo all'azione un termine costante che non influisce classicamente sulla dinamica dei campi

$$S \longrightarrow S + ik\theta , \quad (3.108)$$

$$k = \frac{g}{2\pi} \int d^2x E(x) = \frac{g}{2\pi} \int d^2x \tilde{F}(x) , \quad (3.109)$$

dove $\tilde{F} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = E$.

Sondiamo ora il legame tra l'anomalia chirale e il campo duale \tilde{F} : quello che segue è un esempio di cambio di variabili nella misura funzionale che ha uno Jacobiano non costante.

Ci mettiamo sul piano euclideo dove il conto è più semplice poichè non intervengono condizioni di periodicità nei campi. Quello che otterremo getterà luce sull'origine della massa di Schwinger μ nella formula del determinante fermionico (3.57).

La funzione di partizione fermionica sul piano euclideo per il modello senza massa è data da

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi}(i\mathcal{D}-gA)\psi} = \det(i\mathcal{D}) . \quad (3.110)$$

Sotto la trasformazione chirale infinitesima $\delta\beta(x)$

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow (1 + \delta\beta\gamma_5)\psi \\ \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}(1 + \delta\beta\gamma_5) \end{cases} \quad (3.111)$$

la Lagrangiana cambia in

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi'} &= \bar{\psi}'(i\cancel{\partial} - g\cancel{A})\psi' \\ &= \bar{\psi}(1 + \delta\beta\gamma_5)(i\cancel{\partial} - g\cancel{A})(1 + \delta\beta\gamma_5)\psi = \mathcal{L}_\psi + i(\partial_\mu\delta\beta)\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\ &= \mathcal{L}_\psi + i(\partial_\mu\delta\beta)J_\mu^5 \end{aligned} \quad (3.112)$$

e l'integrale di cammino diventa

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' e^{\int \mathcal{L}_{\psi'}} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi J(A) e^{\int \mathcal{L}_\psi + i(\partial_\mu\delta\beta)J_\mu^5} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi J(A) e^{\int \mathcal{L}_\psi - i\delta\beta\partial_\mu J_\mu^5} . \end{aligned} \quad (3.113)$$

Per calcolare lo Jacobiano $J(A)$ espandiamo gli spinori su una base di autofunzioni dell'operatore hermitiano $i\cancel{D}$

$$i\cancel{D}\psi_n = \lambda_n\psi_n ,$$

$$\psi(x) = \sum_n c_n\psi_n , \quad (3.114)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{c}_n\psi_n^\dagger . \quad (3.115)$$

La misura funzionale su questa base è

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{c}_n dc_n \quad (3.116)$$

ed i coefficienti di Grassmann cambiano in seguito alla (3.111) in

$$c'_n = c_n + \sum_m c_m \int d^2x \psi_n^\dagger(x)\delta\beta(x)\gamma_5\psi_m = C_{nm}c_m , \quad (3.117)$$

$$\bar{c}'_n = \bar{c}_n + \sum_m \bar{c}_m \int d^2x \psi_m^\dagger(x)\delta\beta(x)\gamma_5\psi_n = C_{mn}\bar{c}_m . \quad (3.118)$$

In base alle proprietà delle variabili di Grassmann, lo Jacobiano di una trasformazione lineare

$$c'_n = C_{nm}c_m \quad (3.119)$$

è dato da

$$J_{Grass}(C) = [\det C]^{-1} . \quad (3.120)$$

Poichè la matrice C_{nm} in (3.117) è prossima all'identità , ricordiamo che, nel caso in cui la matrice A sia infinitesima, possiamo scrivere

$$\det(1 + A) = e^{\text{Tr}A} \quad (3.121)$$

e quindi il cambiamento della misura funzionale è

$$\prod_n d\bar{c}'_n dc'_n = \prod_n d\bar{c}_n dc_n [\det C]^{-2} = \prod_n d\bar{c}_n dc_n e^{-2 \int \delta\beta \sum_m \bar{\psi}_m \gamma_5 \psi_m} . \quad (3.122)$$

Fin qui abbiamo trattato formalmente la matrice C_{nm} come se avesse un numero finito di elementi, ma la somma nell'esponenziale nella formula precedente necessita di una regolarizzazione: adottiamo la tecnica di Fujikawa [19] ed introduciamo un parametro di massa M :

$$\sum_m \bar{\psi}_m(x) \gamma_5 \psi_m(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_m \bar{\psi}_m(x) \gamma_5 e^{-\frac{(i\mathcal{D})^2}{M^2}} \psi_m(x) = \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_m \langle m|x \rangle \gamma_5 e^{-\frac{(i\mathcal{D})^2}{M^2}} \langle x|m \rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \int \frac{d^2k}{2\pi} \langle k|x \rangle \gamma_5 e^{-\frac{(i\mathcal{D})^2}{M^2}} \langle x|k \rangle , \end{aligned} \quad (3.124)$$

dove per calcolare la traccia operatoriale siamo passati alla base delle onde piane:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ikx} \gamma_5 e^{-\frac{(i\mathcal{D})^2}{M^2}} e^{+ikx} . \quad (3.125)$$

Esplicitiamo ora l'operatore $(i\mathcal{D})^2$ utilizzando la formula

$$\not{a} \not{b} = a_\mu b_\mu + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] a_\mu b_\nu , \quad (3.126)$$

$$(i\mathcal{D})^2 = (i\cancel{\partial} - g\cancel{A})(i\cancel{\partial} - g\cancel{A}) = -\cancel{\partial} \cancel{\partial} + g^2 \cancel{A} \cancel{A} - ig \cancel{\partial} \cancel{A} - ig \cancel{A} \cancel{\partial}$$

$$= -\partial^2 + g^2 A^2 - ig\partial A - igA\partial - \frac{ig}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]F_{\mu\nu} \quad (3.127)$$

ed inserendo quest'ultima formula nella traccia e riscaldando gli impulsi $k \rightarrow \frac{k}{M}$, otteniamo

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} M^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{-ikMx} \gamma_5 \exp\left[\frac{1}{M^2} \left(\partial^2 - g^2 A^2 + ig\partial A + igA\partial + \frac{ig}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]F_{\mu\nu} \right)\right] e^{ikMx} = \quad (3.128)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left\{ \gamma_5 e^{\frac{ig}{4M^2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]F_{\mu\nu}} \right\} M^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \exp\left[\frac{1}{M^2} \left(-M^2 k^2 - g^2 A^2 + ig\partial_\mu A_\mu - 2gMk_\mu A_\mu \right)\right]. \quad (3.129)$$

L'integrale negli impulsi può essere riscritto implicitamente

$$\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \exp\left[k^2 + \frac{P_\mu k_\mu}{M} + \frac{Q}{M^2}\right] = \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \exp\left[k'^2 + \frac{Q'}{M^2}\right] = \frac{1}{4\pi} e^{\frac{Q'}{M^2}} \quad (3.130)$$

con $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{Q'}{M^2} = 0$.

Inserendo questo termine in (3.129), riscriviamo il limite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^2}{4\pi} e^{\frac{Q'}{M^2}} \text{tr} \left\{ \gamma_5 e^{\frac{ig}{4M^2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]F_{\mu\nu}} \right\} \quad (3.131)$$

e sviluppiamo l'esponenziale

$$\text{tr} \left\{ \gamma_5 + \gamma_5 \frac{ig}{4M^2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]F_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{M^4}\right) \right\} = \frac{ig}{4M^2} 4i\epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{M^4}\right) = \frac{-2g}{M^2} \tilde{F} + O\left(\frac{1}{M^4}\right), \quad (3.132)$$

dove abbiamo usato

$$\text{tr} \gamma_5 = 0, \quad \text{tr} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = 2i\epsilon_{\mu\nu}.$$

Otteniamo infine l'espressione regolarizzata

$$\sum_m \bar{\psi}_m(x) \gamma_5 \psi_m(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^2}{4\pi} e^{\frac{Q'}{M^2}} \left(\frac{-2g}{M^2} \tilde{F} + O\left(\frac{1}{M^4}\right) \right) = \frac{-g}{2\pi} \tilde{F}. \quad (3.133)$$

Riassumendo, in seguito alla trasformazione chirale (3.111), la misura funzionale cambia secondo

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int \delta\beta \frac{g}{\pi} \tilde{F}} \quad (3.134)$$

e la funzione di partizione (3.113) diventa

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int \mathcal{L}_\psi} e^{\int \delta\beta \left[\frac{g}{\pi} \tilde{F} - i\partial_\mu J_\mu^5 \right]} . \quad (3.135)$$

Dall'arbitrarietà della variazione ricaviamo l'anomalia chirale

$$i\partial_\mu J_\mu^5 = \frac{g}{\pi} \tilde{F} . \quad (3.136)$$

Analizziamo ora il meccanismo che genera la massa di Schwinger contenuta nella (3.57): come in precedenza in questo capitolo, scegliamo la gauge di Lorentz, nella quale il campo di gauge è proporzionale ad un rotore

$$A_\mu(x) = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) , \quad (3.137)$$

dove a differenza del modello sul toro non ci sono termini costanti ed abbiamo incluso nel campo ϕ anche la parte di istantone.

La Lagrangiana di interazione è

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - g\mathcal{A})\psi = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - g\gamma_\mu \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x))\psi = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + ig\gamma_\nu \gamma_5 \partial_\nu \phi(x))\psi \quad (3.138)$$

e pertanto la trasformazione chirale finita

$$\begin{cases} \psi \longrightarrow e^{g\gamma_5 \phi} \psi \\ \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{g\gamma_5 \phi} \end{cases} \quad (3.139)$$

disaccoppia il campo fermionico da quello di gauge annullando l'interazione

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - g\mathcal{A})\psi = \bar{\psi} e^{g\gamma_5 \phi} i\partial\!\!\!/ e^{g\gamma_5 \phi} \psi = \bar{\psi}' i\partial\!\!\!/ \psi' . \quad (3.140)$$

Calcoliamo quindi lo Jacobiano della trasformazione (3.139) sommando trasformazioni infinitesime definite da

$$\beta = \tau g \phi(x) , \quad \tau \in [0, 1] \quad (3.141)$$

$$\delta\beta = \delta\tau g \phi(x) . \quad (3.142)$$

In seguito ad ogni trasformazione infinitesima, il campo ψ vede modificarsi il campo di gauge in base a

$$A_\mu(\tau + \delta\tau) = A_\mu(\tau) + \delta A_\mu(\tau) = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \delta\tau \phi =$$

$$= (1 - \delta\tau)\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi, \quad (3.143)$$

che integrata porta

$$A_\mu(\tau) = (1 - \tau)\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi \quad (3.144)$$

e quindi

$$\tilde{F}(\tau) = (1 - \tau)\tilde{F}. \quad (3.145)$$

Inseriamo questa espressione nella (3.134) ed integriamo le trasformazioni infinitesime in $\delta\tau$

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\frac{\mu^2}{\pi} \int d^2x \int_0^1 \delta\tau(1-\tau)\phi(x)\tilde{F}(x)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\frac{\mu^2}{2} \int d^2x \phi(x)\tilde{F}(x)}. \quad (3.146)$$

Otteniamo infine la funzione di partizione del campo fermionico

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int \bar{\psi}i\not{D}\psi} e^{\frac{\mu^2}{2} \int \phi\tilde{F}} = e^{\frac{\mu^2}{2} \int \phi\tilde{F}} \det(i\not{D}), \quad (3.147)$$

che mostra la nascita nell'azione di un termine quadratico nel campo di gauge. Esplicitiamo \tilde{F} in gauge di Lorentz

$$\tilde{F} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}[\partial_\mu\epsilon_{\nu\rho}\partial_\rho\phi - \partial_\nu\epsilon_{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi] = -\partial^2\phi \quad (3.148)$$

e calcoliamo l'integrale

$$\frac{\mu^2}{2} \int \phi\tilde{F} = -\frac{\mu^2}{2} \int \phi\partial^2\phi = \frac{\mu^2}{2} \int \partial_\mu\phi\partial_\mu\phi = \quad (3.149)$$

$$\frac{\mu^2}{2} \int \epsilon_{\mu\rho}\epsilon_{\nu\rho}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = \frac{\mu^2}{2} \int A_\mu A_\mu \quad (3.150)$$

e questo è proprio un termine di massa per il campo di gauge: come risultato della trasformazione (3.139) l'interazione si è spenta ed il campo A_μ ha acquistato la massa μ di Schwinger.

* * *

Torniamo ora alla correzione all'azione introdotta all'inizio di questa sezione

$$S \longrightarrow S + ik\theta \quad (3.151)$$

ed osserviamo che una opportuna trasformazione chirale finita può cancellare il contributo di θ in ogni settore topologico: infatti per una trasformazione chirale infinitesima con parametro costante β ricaviamo in base alla (3.134) la seguente anomalia chirale

$$\mathcal{A}_{chirale} = \frac{g}{\pi} \beta \int d^2x \tilde{F} \quad (3.152)$$

e questa espressione continua a valere in questa forma (senza il fattore $\frac{1}{2}$ di (3.147)) anche nel caso in cui β sia finita.

Scegliamo per β il valore

$$\beta = -\frac{i\theta}{2} \quad (3.153)$$

ed otteniamo

$$\mathcal{A}_{chirale} = -i\theta \frac{g}{2\pi} \int d^2x \tilde{F} = -ik\theta . \quad (3.154)$$

E' chiaro quindi che questa nuova trasformazione chirale è in grado di cancellare il parametro θ in ogni settore topologico.

Nel modello di Schwinger senza massa il funzionale di vuoto non dipende dalle correzioni (3.151) , perchè vale

$$Z[\theta] = \sum_k e^{ik\theta} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{S[\bar{\psi}, \psi, A]} = \sum_k \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}A e^{S[\bar{\psi}', \psi', A]} = Z[0] \quad (3.155)$$

ed è proprio in questo modo che si introduce nel formalismo degli integrali di cammino l'analogo dei vuoti θ della tecnica operatoriale.

Nel modello di Schwinger massivo, la presenza del termine di massa rompe la simmetria chirale della lagrangiana anche a livello classico e se si prova a riprodurre la trasformazione che porta a (??), ci si accorge che, per cancellare esattamente tutte le fasi $e^{ik\theta}$, si paga il prezzo di nuovi termini chirali nell'azione fermionica:

$$e^{m\bar{\psi}\psi} \longrightarrow e^{m\bar{\psi}\psi + 2m\beta\bar{\psi}\gamma_5\psi} = e^{m\bar{\psi}\psi} e^{-i\theta m\bar{\psi}\gamma_5\psi} .$$

In questo caso dobbiamo perciò indicare le fasi esplicitamente ed i valori di θ non sono più equivalenti per la teoria:

$$Z(m, \theta) = \sum_k e^{ik\theta} Z_k(m) \neq Z(m, \theta') . \quad (3.156)$$

3.6 Espansione perturbativa

La funzione di partizione del modello di Schwinger massivo è una somma delle funzioni di partizione di ogni singolo settore topologico del campo di gauge pesate con un fattore di fase dipendente dall'angolo di vuoto θ :

$$Z(m, \theta) = \sum_k e^{ik\theta} Z_k(m) , \quad (3.157)$$

dove

$$Z_k(m) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu^{(k)} e^{\int d^2x [\bar{\psi}(i\partial - gA_\mu^{(k)} + m)\psi] - \frac{1}{4}F^2} . \quad (3.158)$$

Riconduciamo il funzionale di vuoto $Z(m, \theta)$ del modello massivo al calcolo di funzioni a più punti del modello senza massa, che siamo in grado di risolvere esattamente. Per questo ci mettiamo nell'ipotesi che la massa del fermione sia piccola rispetto alla massa di Schwinger ($\frac{m}{\mu} \ll 1$) e definiamo l'esponenziale del termine di massa tramite l'espansione in serie:

$$e^{m \int d^2x \bar{\psi}\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int d^2x_i \bar{\psi}(x_i) \psi(x_i) . \quad (3.159)$$

La $Z_k(m)$ diventa

$$Z_k(m) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int d^2x_i \bar{\psi}(x_i) \psi(x_i) e^{\int d^2x [\bar{\psi}(i\partial - gA_\mu^{(k)})\psi] - \frac{1}{4}F^2} \quad (3.160)$$

ed è quindi una serie sulle funzioni a n punti del campo ψ :

$$Z_k(m) = \sum_n \frac{m^n}{n!} \int dx_1^2 \dots dx_n^2 \langle C(x_1, \dots, x_n) \rangle_k , \quad (3.161)$$

dove

$$C(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \bar{\psi}(x_i) \psi(x_i) . \quad (3.162)$$

Scomponiamo ogni forma bilineare fermionica $C(x)$ nelle sue componenti chirali

$$C(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) = \bar{\psi}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi + \bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi = \bar{\psi}P_-\psi + \bar{\psi}P_+\psi = C_-(x) + C_+(x) , \quad (3.163)$$

poichè per i valori di aspettazione nel vuoto di prodotti di C_{\pm} contribuiscono solo determinati settori topologici k .

Sul piano euclideo, il conto delle funzioni a n punti è stato fatto esattamente [7] e porta al risultato

$$\langle C_{e_1, \dots, e_n}(x_1, \dots, x_n) \rangle_k = \langle \prod_{i=1}^n C_{e_i}(x_i) \rangle = \left(\frac{\Sigma}{2} \right)^n e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi D_{\mu}(x_i - x_j)}, \quad (3.164)$$

dove gli indici $e_i = \pm$ sono associati alle componenti chirali di (3.163).

Sommando su tutte le possibili combinazioni degli e_i e su tutti i settori topologici k , otteniamo il correlatore completo sul piano

$$\langle C(x_1, \dots, x_n) \rangle = \left(\frac{\Sigma}{2} \right)^n \sum_{\{e_i\} \in \{\pm\}} e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi D_{\mu}(x_i - x_j)}. \quad (3.165)$$

Se si prova a riprodurre questo conto nel caso del modello sul toro, non si arriva ad una espressione semplice come la (3.165): infatti su una varietà compatta non è possibile applicare la proprietà di cluster delle funzioni di correlazione e non si riesce a fattorizzare il prodotto dei condensati chirali che si basa proprio su questa proprietà. Diverso è invece il caso del cilindro, visto come decompattificazione del toro bidimensionale: è possibile applicare la proprietà di cluster perchè lungo una direzione si possono allontanare a piacere i punti nelle funzioni di correlazione e si arriva ad una espressione del tutto analoga a quella ottenuta sul piano euclideo:

$$\langle C(x_1, \dots, x_n) \rangle_{\beta} = \left(\frac{\Sigma_{\beta}}{2} \right)^n \sum_{\{e_i\} \in \{\pm\}} e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi \Delta_{\mu}(x_i - x_j; T)}, \quad (3.166)$$

dove abbiamo fatto le seguenti sostituzioni rispetto a (3.165):

$$D_{\mu}(x - y) = \Delta_{\mu}(x - y; T = 0) \longrightarrow \Delta_{\mu}(x - y; T),$$

$$\Sigma \longrightarrow \Sigma_{\beta}.$$

Ricordiamo che il condensato chirale sul cilindro è dato da

$$\Sigma_{\beta} = \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\beta} = -\frac{2}{\beta} e^{-\frac{\pi}{\beta \mu}} e^{J(\beta \mu)}.$$

Dal momento che nella funzione di partizione massiva

$$Z(m, \theta) = \sum_k e^{ik\theta} Z_k(m) \quad (3.167)$$

pesiamo con una fase diversa ogni settore topologico, è comodo lavorare con il correlatore delle densità chirali (3.164) piuttosto che con (3.166), poichè per un dato $\langle C_{e_1, \dots, e_n}(x_1, \dots, x_n) \rangle$ contribuisce solo un numero finito di settori k . Abbiamo infatti che

$$\langle C_{e_1, \dots, e_n}(x_1, \dots, x_n) \rangle_k = \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^n e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi\Delta_\mu(x_i - x_j; T)} \quad (3.168)$$

per i k tali che [14]

$$k = \sum_i e_i = n_+ - n_- , \quad (3.169)$$

dove n_\pm contano il numero di e_\pm . La seguente tabella mostra i casi possibili per le prime funzioni di correlazione a n punti

n	k
0	0
1	1 , -1
2	2 , 0 , -2
3	3 , 1 , -1 , -3
4	4 , 2 , 0 , -2 , -4

A questo punto, per procedere nel calcolo dell'espansione perturbativa della $Z(m, \theta)$, scambiamo l'ordine delle serie sui settori topologici e sul numero di punti delle funzioni di correlazioni contenute in $Z(m, \theta)$:

$$\sum_k \sum_n \dots \longrightarrow \sum_n \sum_k \dots$$

e cerchiamo di sommare la serie su k sfruttando il fatto che le $\langle C_{e_1, \dots, e_n} \dots \rangle$ non dipendono esplicitamente da k , come si vede da (3.168): dal calcolo dei primi termini ricaveremo per induzione il comportamento della serie totale. A questo scopo è conveniente riscrivere l'esponenziale della (3.168) così :

$$e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi\Delta_\mu(x_i - x_j; T)} = e^{-4\pi\Delta_\mu(x_1 - x_2; T)} e^{+4\pi\Delta_\mu(x_1 - x_3; T)} \dots =$$

$$(1 + E(x_1 - x_2))(1 + F(x_1 - x_3)) \dots \quad (3.170)$$

dove abbiamo esplicitato una possibile configurazione con $e_i = \{+, +, -, \dots\}$ e le funzioni introdotte E e F sono date da

$$E(x) = e^{-4\pi\Delta_\mu(x;T)} - 1 \quad , \quad F(x) = e^{+4\pi\Delta_\mu(x;T)} - 1 . \quad (3.171)$$

Per $|x| \rightarrow \infty$, $\Delta_\mu(x)$ tende esponenzialmente a zero e così pure $E(x)$ e $F(x)$: riportiamo l'espressione per il propagatore scalare sul cilindro che abbiamo ricavato nel capitolo 1

$$\Delta_\mu(\tau, x; T) = \sum_n \Delta_\mu(\tau + n\beta, x; T = 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_n K_0(\mu\sqrt{(\tau + n\beta)^2 + x^2}) \quad (3.172)$$

$$K_0(\mu r) \rightarrow -\ln\left[\frac{e^\gamma \mu r}{2}\right], \quad r \rightarrow 0 \quad (3.173)$$

$$K_0(\mu r) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\mu r}} e^{-\mu r} \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu r}\right)\right], \quad r \rightarrow \infty \quad (3.174)$$

(la γ nella formula (3.173) è la costante di Eulero-Mascheroni).

Nell'origine invece il comportamento di $E(x)$ e $F(x)$ è radicalmente diverso: a causa della singolarità (3.173) del propagatore libero, $E(x)$ è finita, mentre la $F(x)$ diverge

$$\begin{aligned} E(x) &\rightarrow -1, & |x| &\rightarrow 0 \\ F(x) &\rightarrow \infty, & |x| &\rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Vedremo nel seguito come la singolarità contenuta in $F(x)$ possa essere sottratta in modo non ambiguo: essa è dovuta al comportamento singolare del propagatore libero e non all'interazione dinamica dei campi.

Riscriviamo la funzione di partizione $Z(m, \theta)$ in termini delle funzioni di correlazione fermioniche:

$$\begin{aligned} Z(m, \theta) &= \sum_k e^{ik\theta} Z_k(m) \\ &= \sum_k e^{ik\theta} \sum_n \frac{m^n}{n!} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \langle C(x_1 \dots x_n) \rangle_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \frac{m^n}{n!} \sum_k e^{ik\theta} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \langle C(x_1 \dots x_n) \rangle_k \\
&= \sum_n \frac{m^n}{n!} \sum_k e^{ik\theta} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \sum_{\{e_i\} \in \{\pm\}} \langle C_{e_1 \dots e_n}(x_1 \dots x_n) \rangle_k \\
&= \sum_n \frac{m^n}{n!} \sum_k e^{ik\theta} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \sum_{\{e_i\} \in \{\pm\}} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2}\right)^n e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi\Delta_\mu(x_i - x_j; T)} \delta(k - \sum_i e_i) \\
&= \sum_n \frac{\left(\frac{m\Sigma_\beta}{2}\right)^n}{n!} \sum_k e^{ik\theta} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \sum_{\{e_i\} \in \{\pm\}} e^{-\sum_{i<j} e_i e_j 4\pi\Delta_\mu(x_i - x_j; T)} \delta(k - \sum_i e_i)
\end{aligned}
\tag{3.175}$$

dove la δ esprime il vincolo corrispondente a (3.169).

Esplicitiamo ora i primi termini dell'espansione perturbativa (3.175) per poter individuare il comportamento della serie: la tabella di pagina 74 permette di ricavare i contributi delle funzioni di correlazione chirali in dipendenza del numero n di punti

n=1:

$$\frac{m \Sigma_\beta}{1! \cdot 2} \int d^2x (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{m \Sigma_\beta}{1! \cdot 2} V(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{3.176}$$

n=2:

$$\begin{aligned}
&\frac{m^2}{2!} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2}\right)^2 \int d^2x_1 d^2x_2 \left[e^{2i\theta} e^{-4\pi\Delta_\mu(x_1 - x_2)} + 2e^{4\pi\Delta_\mu(x_1 - x_2)} + e^{-2i\theta} e^{-4\pi\Delta_\mu(x_1 - x_2)} \right] \\
&= \frac{m^2}{2!} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2}\right)^2 \left[V^2(e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) + V(Ee^{2i\theta} + 2F + Ee^{-2i\theta}) \right] \tag{3.177}
\end{aligned}$$

n=3:

$$\begin{aligned}
&\dots = \frac{m^3}{3!} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2}\right)^3 \left[V^3(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) + \right. \\
&V^2(3Ee^{3i\theta} + 3(E + 2F)e^{i\theta} + 3(E + 2F)e^{-i\theta} + 3Ee^{-3i\theta}) + \left. \right]
\end{aligned}$$

$$V\left((3E^2 + E \times E \times E)e^{3i\theta} + 3(2EF + F^2 + E \times F \times F)e^{i\theta} + 3(2EF + F^2 + E \times F \times F)e^{-i\theta} + (3E^2 + E \times E \times E)e^{-3i\theta}\right) \quad (3.178)$$

n=4:

$$\begin{aligned} \dots = & \frac{m^4}{4!} \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^4 \left[V^4(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) + \right. \\ & V^3(6Ee^{4i\theta} + 12(E+F)e^{2i\theta} + 12(E+2F) + 12(E+F)e^{-2i\theta} + 6Ee^{-4i\theta}) + \\ & V^2((15E^2 + 4E \times E \times E)e^{4i\theta} + 4(3E^2 + 9EF + 3F^2 + E \times E \times E + 3E \times F \times F)e^{2i\theta} + \\ & + 6(E^2 + 8EF + F^2 + 4E \times F \times F) + 4(3E^2 + 9EF + 3F^2 + E \times E \times E + 3E \times F \times F)e^{-2i\theta} + \\ & \left. + (15E^2 + 4E \times E \times E)e^{-4i\theta} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.179)$$

dove abbiamo usato l'identificazione

$$E \times E \times E = \int d^2x d^2y E(x)E(x+y)E(y) \quad (3.180)$$

Riordiniamo i termini (3.176)-(3.179) in funzione delle potenze crescenti del volume V :

$$\begin{aligned} & \frac{V}{1!} \left[m \frac{\Sigma\beta}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \frac{m^2}{2} \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^2 (Ee^{2i\theta} + 2F + Ee^{-2i\theta}) + \right. \\ & \frac{m^3}{6} \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^3 \left((3E^2 + E \times E \times E)(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(2EF + F^2 + E \times F \times F)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \dots \right) + \\ & \frac{V^2}{2!} \left[m^2 \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^2 (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) + m^3 \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^3 \left(E(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + (E+2F)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right) + \right. \\ & \frac{m^4}{12} \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^4 \left((15E^2 + 4E \times E \times E)(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + \right. \\ & 4(3E^2 + 9EF + 3F^2 + E \times E \times E + 3E \times F \times F)(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \\ & \left. \left. 6(E^2 + 8EF + F^2 + 4E \times F \times F) \right) + \dots \right] + \\ & \frac{V^3}{3!} \left[m^3 \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^3 (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) + \right. \\ & \left. \frac{m^4}{2} \left(\frac{\Sigma\beta}{2}\right)^4 \left(3E(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + 6(E+F)(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + (E+2F) \right) + \dots \right] + \end{aligned}$$

$$\frac{V^4}{4!} \left[m^4 \left(\frac{\Sigma_\beta}{2} \right)^4 (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) + \dots \right] + \dots$$

L'andamento della serie è del tipo

$$\frac{V}{1!} \alpha + \frac{V^2}{2!} \alpha^2 + \frac{V^3}{3!} \alpha^3 + \dots \quad (3.181)$$

dove i primi termini della funzione α sono

$$\begin{aligned} \alpha(m, \theta) = & m \frac{\Sigma_\beta}{2} 2 \cos \theta + \frac{m^2}{2!} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2} \right)^2 (2E \cos 2\theta + 2F) + \\ & \frac{m^3}{3!} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2} \right)^3 \left((3E^2 + E \times E \times E) 2 \cos 3\theta + 3(2EF + F^2 + E \times E \times E) 2 \cos \theta \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.182)$$

e non dipende esplicitamente dal volume V .

Riconosciamo in (3.181) lo sviluppo di un esponenziale e facciamo l'ipotesi che la $Z(m, \theta)$ si possa effettivamente scrivere come

$$Z(m, \theta) = \mathcal{N} e^{V\alpha(m, \theta)}. \quad (3.183)$$

Per definire la funzione di partizione del modello massivo scegliamo di normalizzare la $Z(m, \theta)$ rispetto a $Z(0, 0)$, che è il funzionle di vuoto del modello senza massa:

$$\begin{aligned} Z(0, 0) = Z &= \sum_k \int_{A^{(k)}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A^{(k)} e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]} \\ &= \int_{A^{(0)}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A^{(0)} e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Avremo quindi in base alla (3.183) e alla (3.184)

$$Z(m, \theta) = Z e^{V\alpha(m, \theta)} \quad (3.185)$$

3.6.1 Condensato chirale

Una volta ricavata la forma normalizzata (3.185) della funzione di partizione massiva è facile ottenere una stima del condensato chirale che sia perturbativa nella massa m del fermione ed esatta nella carica topologica k : questo

era lo scopo del nostro lavoro, perchè è ora possibile confrontare i risultati dell'approccio operatoriale con quelli della tecnica funzionale. In entrambi il condensato chirale è espresso in termini della massa m e dell'angolo di vuoto θ .

Osserviamo come sia trasparente nell'approccio funzionale il legame tra il vuoto θ ed i settori topologici del campo di gauge: ogni valore di θ pesa in modo diverso il contributo alla $Z(m, \theta)$ proveniente dal settore topologico k . La scelta $\theta = 0$ è quella più vicina al modello senza massa, perchè si semplificano i fattori di fase $e^{i\theta}$.

Il condensato chirale è definito dal valore di aspettazione nel vuoto della densità fermionica $\bar{\psi}\psi$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta &= \frac{1}{V} \frac{\mathcal{N}}{Z(m, \theta)} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S[\bar{\psi}, \psi, A]} \int d^2x \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
&= \frac{1}{V} \frac{1}{Z(m, \theta)} \frac{\partial}{\partial m} Z(m, \theta) \\
&= \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial m} \ln Z(m, \theta) \\
&= \frac{\partial}{\partial m} \alpha(m, \theta)
\end{aligned} \tag{3.186}$$

e confrontando con la (3.182) otteniamo l'espressione finale che ci permette di calcolare esplicitamente il condensato chirale

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta = \Sigma_\beta \cos \theta + 2m \left(\frac{\Sigma_\beta}{2} \right)^2 (E \cos 2\theta + F) + O(m^2) . \tag{3.187}$$

3.7 Calcolo numerico

Ci proponiamo di ricavare una stima del condensato chirale (3.187) al primo ordine nella massa m .

Come già per il calcolo operatoriale, rendiamo adimensionale la quantità che vogliamo calcolare numericamente:

$$\frac{\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta}{\mu} = \frac{\Sigma_\beta \cos \theta}{\mu} + 2 \frac{m}{\mu} \left(\frac{\Sigma_\beta}{2} \right)^2 (E \cos 2\theta + F) + O\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) . \tag{3.188}$$

I parametri in gioco sono la temperatura T , la massa di Schwinger μ (o equivalentemente la costante d'accoppiamento elettromagnetico g), la massa del fermione m e l'angolo di vuoto θ .

Normalizziamo tutte le quantità dimensionali rispetto alla massa di Schwinger e otteniamo i rapporti numerici

$$\frac{m}{\mu}, \quad \frac{T}{\mu} = \frac{1}{\beta\mu}, \quad \theta.$$

Il primo termine della (3.188) è già pronto per essere calcolato numericamente: abbiamo ricavato infatti in (3.107) la seguente espressione per il condensato chirale libero:

$$\frac{\Sigma_\beta}{\mu} = -\frac{2}{\beta\mu} e^{-\frac{\pi}{\beta\mu}} e^{J(\beta\mu)}. \quad (3.189)$$

In appendice B è riportato il conto che porta alla forma integrale di $J(\beta\mu)$:

$$e^{J(\beta\mu)} = B(\beta\mu) = \frac{\mu\beta}{4\pi} \exp \left[\gamma + \frac{\pi}{\mu\beta} - 2 \int_0^\infty \frac{du}{e^{\mu\beta \cosh(u)} - 1} \right] \quad (3.190)$$

e possiamo scrivere quindi

$$\frac{\Sigma_\beta}{\mu} = -\frac{e^\gamma}{2\pi} e^{-2 \int_0^\infty \frac{du}{e^{\mu\beta \cosh(u)} - 1}}. \quad (3.191)$$

Estraiamo ora la dipendenza dimensionale dall'integrale di $E(x)$ che compare nel secondo termine di (3.188)

$$E = \int_{\mathcal{C}} d^2x E(x) = \int_{-\frac{\beta}{2}}^{+\frac{\beta}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-4\pi\Delta_\mu(t,x;T)} - 1, \quad (3.192)$$

dove abbiamo esplicitato gli estremi di integrazione secondo la convenzione introdotta a pag.46.

Esprimiamo il propagatore scalare Δ_μ sul cilindro in termini delle funzioni di Bessel utilizzando le formule (1.25) e (1.29) ricavate nel capitolo 1:

$$\Delta_\mu(t, x; T) = \frac{1}{2\pi} \sum_n K_0(\mu\sqrt{(t-n\beta)^2 + x^2}). \quad (3.193)$$

Riscaliamo ora l'integrale (3.192)

$$t \longrightarrow \frac{t}{\mu}, \quad x \longrightarrow \frac{x}{\mu} \quad (3.194)$$

$$E = \frac{1}{\mu^2} \int_{-\frac{\beta\mu}{2}}^{+\frac{\beta\mu}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2\sum_n K_0(\sqrt{(t-n\beta\mu)^2+x^2})} - 1 \quad (3.195)$$

ed abbiamo quindi fattorizzato la dipendenza dalla scala di massa μ ; l'integrale è ora espresso in funzione del solo parametro adimensionale $\beta\mu$:

$$E = \frac{1}{\mu^2} \tilde{E}(\beta\mu) = \frac{1}{\mu^2} \tilde{E}\left(\frac{\mu}{T}\right). \quad (3.196)$$

Analogo conto porta allo stesso risultato per l'integrale della $F(x)$:

$$F = \frac{1}{\mu^2} \tilde{F}(\beta\mu) = \frac{1}{\mu^2} \int_{-\frac{\beta\mu}{2}}^{+\frac{\beta\mu}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{+2\sum_n K_0(\sqrt{(t-n\beta\mu)^2+x^2})} - 1. \quad (3.197)$$

Questa legge di scala rispetto a μ ci ha permesso di poter scrivere nella (3.188) che il termine trascurato è dell'ordine del rapporto $\frac{m^2}{\mu^2}$: infatti da un'analisi della andamento (3.182) della funzione α possiamo indurre che i termini che compongono $\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial m} \alpha$ siano una serie del tipo

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial m} \alpha = \sum_n c_n \left(\frac{m}{\mu}\right)^n, \quad (3.198)$$

dove i coefficienti c_n sono adimensionali.

A supporto di questa espressione, notiamo che la (3.198) deve essere adimensionale:

$$\frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_\theta}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial m} \alpha \quad (3.199)$$

e quindi i rapporti di massa contenuti in $\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial m} \alpha$ non possono sbilanciarsi.

Il calcolo numerico di \tilde{E} non presenta problemi di convergenza, perchè per $|x| \rightarrow \infty$ il propagatore Δ_μ tende esponenzialmente a zero e così pure la differenza

$$e^{-4\pi\Delta_\mu(t,x;T)} - 1 \rightarrow -4\pi\Delta_\mu(t,x;T) \propto e^{-|x|}. \quad (3.200)$$

Nell'origine l'integrando di \tilde{E} è finito:

$$e^{-2K_0(0)} e^{-2\sum_{n \neq 0} K_0(|n\beta\mu|)} = \quad (3.201)$$

$$= e^{-\infty} e^{4\int_0^\infty \frac{du}{e^{\mu\beta \cosh(u)} - 1}} = 0, \quad (3.202)$$

dove abbiamo utilizzato la (B.23).

Passiamo ora all'integrale di $F(x)$, che è divergente nell'origine, come già annunciato a pag.75.

La convergenza all'infinito non presenta problemi anche in questo caso, perchè vale ancora per $|x| \rightarrow \infty$

$$e^{+4\pi\Delta_\mu(t,x;T)} - 1 \rightarrow +4\pi\Delta_\mu(t,x;T) \propto e^{-|x|} \quad (3.203)$$

Nell'origine invece $F(x)$ diverge e possiamo fattorizzare il suo comportamento così

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} e^{2K_0(|x|)} e^{2\sum_{n \neq 0} K_0(|t-n\beta\mu, x|)} = e^{2K_0(0^+)} e^{-4\int_0^\infty \frac{du}{e^{\mu\beta \cosh(u)} - 1}} \quad (3.204)$$

Come visto nel capitolo 1, le singolarità alle corte distanze della teoria di campo a temperatura finita sono le stesse della teoria a temperatura nulla: in (3.204) infatti il comportamento singolare deriva dal propagatore a temperatura nulla

$$\Delta_\mu(t, x) = \frac{1}{2\pi} K_0(\mu|x|) .$$

La singolarità di $F(x)$ è dunque puramente cinematica, deriva infatti da un propagatore libero, e non ha legami con la dinamica dell'interazione tra il campo fermionico e quello di gauge.

Rimuoviamo quindi questa divergenza sottraendo opportunamente il contributo del propagatore libero Δ_μ nell'origine. Per fare questo integriamo per parti dopo essere passati in coordinate polari:

$$\tilde{F}(\beta\mu) = \int_{-\frac{\beta\mu}{2}}^{+\frac{\beta\mu}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{+2\sum_n K_0(\sqrt{(t-n\beta\mu)^2+x^2})} - 1 , \quad (3.205)$$

definiamo

$$r_n = \sqrt{(t-n\beta\mu)^2+x^2} \quad (3.206)$$

$$r_0 = r = \sqrt{t^2+x^2} = |x|$$

$$\tilde{F}(\beta\mu) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr r \left(e^{+2\sum_n K_0(r_n)} - 1 \right) , \quad (3.207)$$

dove $r(\theta)$ è definito dalla mappa

$$\theta \mapsto (\theta, r(\theta)) \quad (3.208)$$

che descrive il bordo della striscia $\mathcal{C} = [\beta\mu \times \infty]$.

Poichè l'andamento nell'origine di $K_0(r)$ è dato da

$$K_0(r) = -\ln r - \ln \frac{e^\gamma}{2} + O(r) , \quad (3.209)$$

l'esponenziale $e^{2K_0(r)}$ è regolarizzato dalla sottrazione

$$e^{2K_0(r)+2\ln r} = r^2 e^{2K_0(r)} . \quad (3.210)$$

Fattorizziamo quindi $\frac{1}{r^2}$ in (3.207) ed integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\beta\mu) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr \frac{1}{r} \left[e^{2K_0(r)+2\ln r} e^{+2\sum_{n \neq 0} K_0(r_n)} - r^2 \right] \quad (3.211) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \ln r \left[e^{2K_0(r)+2\ln r} e^{+2\sum_{n \neq 0} K_0(r_n)} - r^2 \right]_{\varepsilon \rightarrow 0}^{r(\theta)} \\ &\quad - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr \ln r \left[e^{2\sum_n K_0(r_n)+2\ln r} \left(\frac{1}{r} + \sum_l K'_0(r_l) \frac{\partial r_l}{\partial r} \right) - r \right] . \end{aligned} \quad (3.212)$$

Riscriviamo l'integrale doppio utilizzando la relazione tra le funzioni di Bessel

$$\begin{aligned} K_1(r) &= -K'_0(r) , \\ 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr \ln r \left[e^{2K_0(r)+2\ln r} \left(K_1(r) - \frac{1}{r} + \sum_{l \neq 0} K_1(r_l) \frac{\partial r_l}{\partial r} \right) - r \right] . \end{aligned} \quad (3.213)$$

L'andamento asintotico di K_1 nell'origine è

$$K_1(r) = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}r \ln r + O(r) \quad (3.214)$$

e possiamo ora verificare che l'integrale rimanente (3.213) in dr è finito: nell'origine

$$\ln r \left(K_1(r) - \frac{1}{r} \right) \rightarrow \ln r \left(\frac{1}{2}r \ln r + O(r) \right) = (\ln r)^2 r + \ln r O(r) \quad (3.215)$$

e questo è infinitesimo per $r \rightarrow 0$.

Nei termini in (3.213) del tipo

$$\int dr \ln r e^{2K_0(r)+2\ln r} K_1(r_l) \frac{\partial r_l}{\partial r}, \quad l \neq 0 \quad (3.216)$$

le funzioni $K_1(r_l)$ sono finite nell'origine e valgono

$$K_1(l\beta\mu)$$

e le derivate sono limitate:

$$\left| \frac{\partial r_l}{\partial r} \right| \leq 1.$$

Pertanto il comportamento di (3.216) è regolato dal logaritmo che ha una singolarità integrabile nell'origine.

Rimane da discutere il termine di bordo in (3.212):

$$\int_0^{2\pi} d\theta \ln r \left[e^{2K_0(r)+2\ln r} e^{+2\sum_{n \neq 0} K_0(r_n)} - r^2 \right]_{\varepsilon \rightarrow 0}^{r(\theta)}. \quad (3.217)$$

L'estremo superiore è definito e porta al contributo

$$\tilde{F}_{bordo} = \int_0^{2\pi} d\theta \ln r(\theta) r(\theta)^2 \left[e^{+2\sum_n K_0(r_n(\theta))} - 1 \right], \quad (3.218)$$

mentre il limite inferiore rappresenta la singolarità che vogliamo sottrarre. Eliminiamo questo termine dal calcolo di \tilde{F} .

Poichè quando si sottrae una singolarità, rimane sempre un'ambiguità nel termine finito, se vogliamo confrontare i risultati della tecnica funzionale con quelli dell'approccio operatoriale, dobbiamo fare in modo che i risultati coincidano almeno in un punto asintotico. Dal momento che siamo interessati al comportamento del condensato chirale al variare della temperatura, la scelta naturale è quella di calibrare il termine finito di \tilde{F} in modo che i calcoli numerici delle due tecniche utilizzate coincidano a $T = 0$.

In questo limite abbiamo verificato che la sottrazione scelta è consistente con i risultati calcolati con il metodo operatoriale (cfr. (2.128)).

Ricapitoliamo gli integrali da calcolare

$$\tilde{E} = \int_{-\frac{\beta\mu}{2}}^{+\frac{\beta\mu}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2\sum_n K_0(\sqrt{(t-n\beta\mu)^2+x^2})} - 1 \quad (3.219)$$

$$\tilde{F} = \tilde{F}_0 + \sum_{l \neq 0} \tilde{F}_l + \tilde{F}_{bordo} \quad (3.220)$$

$$\tilde{F}_0 = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr \ln r \left[e^{2K_0(r)+2\ln r} e^{+2\sum_{n \neq 0} K_0(r_n)} \left(K_1(r) - \frac{1}{r} \right) + r \right] \quad (3.221)$$

$$\tilde{F}_l = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr \ln r \left[e^{2K_0(r)+2\ln r} e^{+2\sum_{n \neq 0} K_0(r_n)} K_1(r_l) \frac{\partial r_l}{\partial r} \right] \quad (3.222)$$

$$\tilde{F}_{bordo} = \int_0^{2\pi} d\theta \ln r(\theta) r(\theta)^2 \left[e^{+2\sum_n K_0(r(\theta)_n)} - 1 \right] \quad (3.223)$$

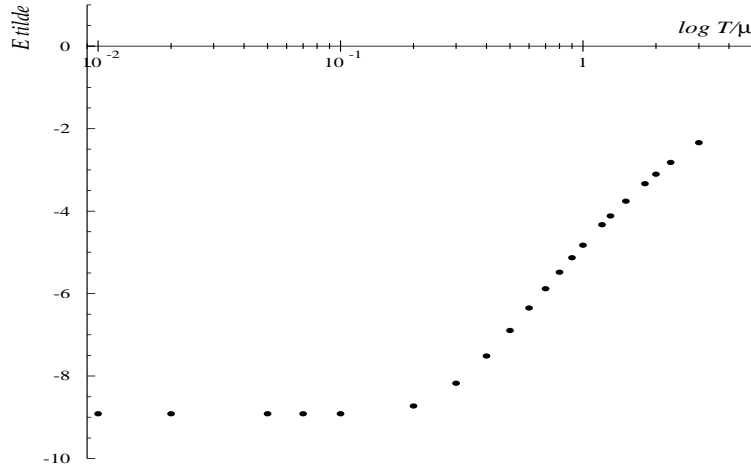


Figura 3.1: \tilde{E} al variare della temperatura

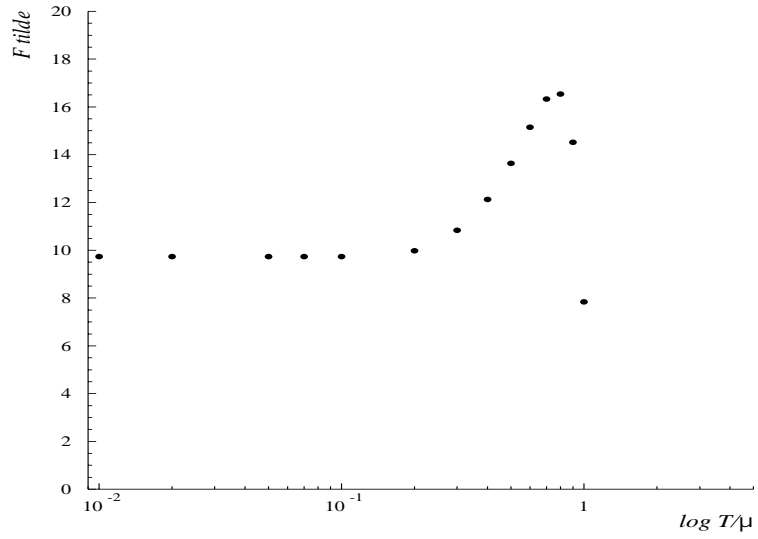


Figura 3.2: \tilde{F} al variare della temperatura

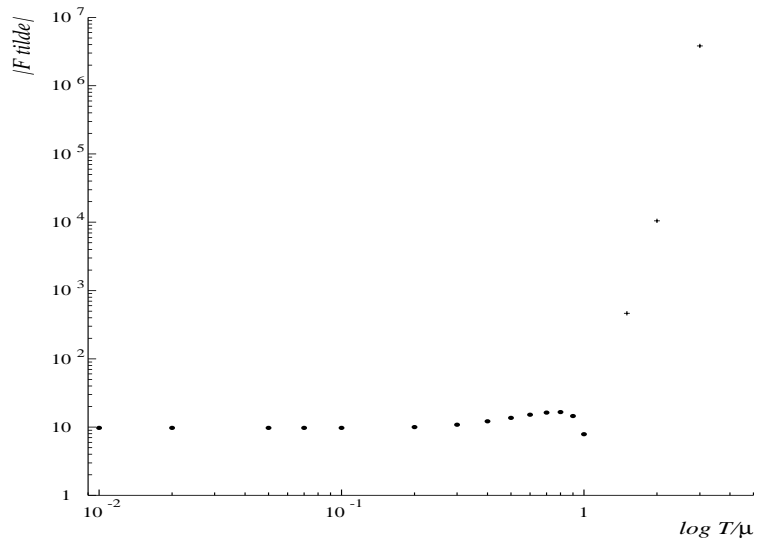


Figura 3.3: Modulo di \tilde{F} (le crocette corrispondono a valori negativi)

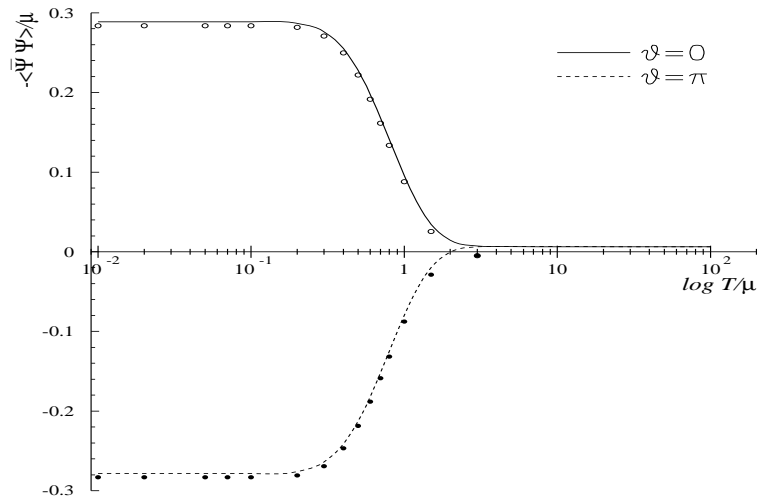


Figura 3.4: Confronto tra risultati funzionali (punti) e operatoriali (linee)
Rapporto di massa: $m/\mu = 0.01$

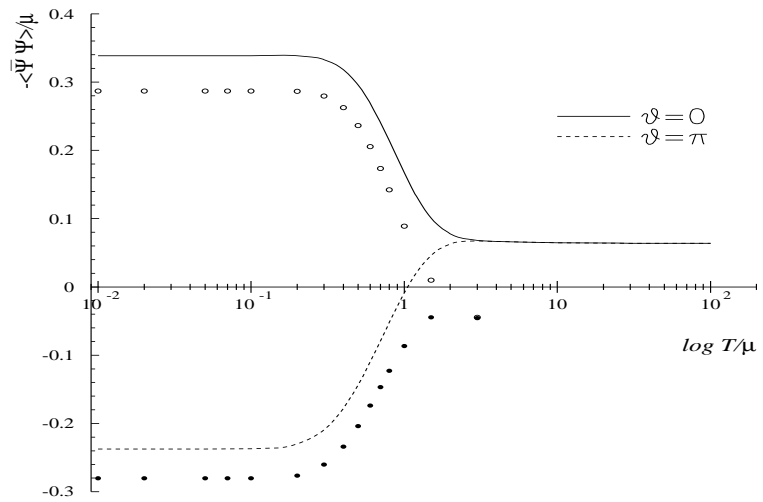


Figura 3.5: Confronto tra risultati funzionali (punti) e operatoriali (linee)
Rapporto di massa: $m/\mu = 0.1$

Capitolo 4

Conclusioni e prospettive

Alla fine del capitolo precedente abbiamo ottenuto l'andamento del condensato chirale al variare della temperatura utilizzando le tecniche di calcolo degli integrali di cammino.

E' possibile ora confrontare i risultati con quelli già ricavati da Hosotani in [11] e riprodotti nel capitolo 2: dal grafico 3.4 si vede che c'è buon accordo tra le due tecniche nel limite di perturbazione di massa $m \ll \mu$. In particolare siamo riusciti a riprodurre la biforcazione nell'angolo θ per $\log T/\mu \sim 1$. Si nota già in questo grafico però che l'andamento asintotico per alte temperature non è rispettato.

Il comportamento dell'integrale \tilde{E} non dà problemi e ad alte temperature il valore tende a zero, come si può vedere dalla (3.219).

\tilde{F} ha un brusco cambiamento attorno a $\log T/\mu = 1$: nel grafico mancano gli ultimi tre punti calcolati per \tilde{F} , che sono fuori scala a valori negativi.

Abbiamo riportato anche il grafico del modulo di \tilde{F} in scala logaritmica per mostrare l'aumento esponenziale dell'integrale.

Questo comportamento di \tilde{F} è in accordo con l'andamento asintotico del condensato calcolato con metodi operatoriali: ci si aspetta infatti che il condensato ad alte temperature tenda ad un valore limite dell'ordine del rapporto di massa:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta = -\frac{2m}{\pi}. \quad (4.1)$$

Abbiamo ricavato il seguente sviluppo perturbativo per il condensato calcolato con tecniche funzionali:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\theta = \Sigma_\beta \cos \theta + m \left(\frac{\Sigma_\beta}{2} \right)^2 (E \cos 2\theta + F) + O(m^2), \quad (4.2)$$

dove si vede che per $T \rightarrow \infty$ la F deve bilanciare il condensato chirale libero che tende a zero esponenzialmente: tuttavia i punti finora calcolati per \tilde{F} non ci permettono di confermare il comportamento asintotico del condensato.

La differenza tra i risultati non è imputabile alla precisione numerica con cui abbiamo calcolato gli integrali di \tilde{E} e \tilde{F} , ma alle approssimazioni fatte per poter giungere ad integrali calcolabili numericamente; ricordiamo qui i punti chiave della nostra analisi:

- il calcolo del condensato è arrestato al primo ordine nella massa
- la funzione di partizione massiva è stata riscritta come sviluppo di un'esponenziale

La prima è una scelta che risponde alla necessità di ottenere risultati in tempi brevi, per vedere se il metodo di calcolo è affidabile e se è in grado di fornire una buona stima del condensato.

Il secondo punto è invece l'ipotesi cardine del nostro lavoro e si basa sul comportamento dei primi termini di una opportuna scomposizione della funzione di partizione: per poter discutere la validità di questa ipotesi sarà necessario confrontarla con il punto debole del calcolo di Hosotani. Nella tecnica operatoriale infatti l'approssimazione fondamentale è stata quella di arrestare lo sviluppo del termine di massa dell'Hamiltoniana al secondo ordine nel campo scalare ϕ .

Come si può vedere dai grafici (2.3) e (2.4), tra $m/\mu = 0.1$ e $m/\mu = 1$ c'è una netta variazione di comportamento del condensato per $\theta = \pi$. Questo fatto si riflette nell'andamento del condensato chirale al variare del rapporto di massa: a $T/\mu = 0.03$ si osserva la traccia di una discontinuità per $m/\mu \sim 0.437$,

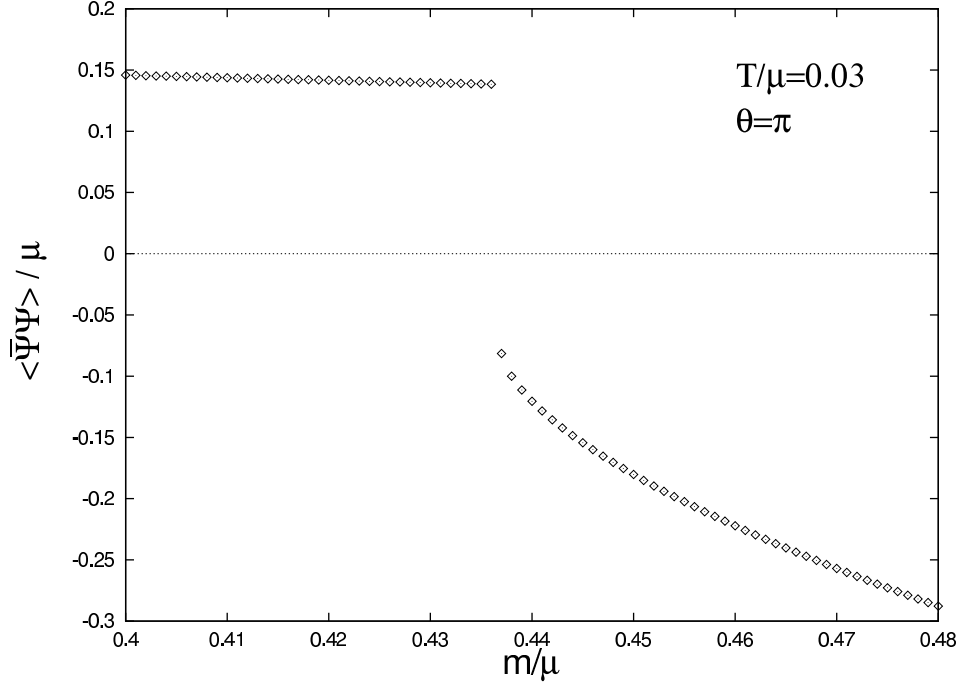


Figura 4.1: Discontinuità nel condensato chirale

come si può vedere nel grafico (4.1).

Il teorema di Mermin-Wagner [23] afferma che una tale discontinuità non può esistere in sistemi unidimensionali a temperatura finita a meno che il rapporto di massa $m_c/\mu \sim 0.437$ non sia universale. Hosotani trova che questo è confermato dai risultati numerici entro una certa approssimazione, ma la questione rimane aperta.

Tra le prospettive immediate quindi di questo lavoro di tesi c'è l'aumento di precisione del calcolo funzionale: includendo nel conto ordini superiori nel rapporto di massa potremo verificare l'andamento asintotico ad alte temperature.

In secondo luogo, sarà interessante riprodurre con la tecnica funzionale il grafico (4.1) per verificare se veramente esiste quella discontinuità o se è frutto delle approssimazioni fatte da Hosotani. Con questi risultati in mano, potre-

mo vedere se l'approssimazione fatta nella funzione di partizione è analoga quanto a conseguenze a quella fatta nel calcolo operatoriale o se invece conduce a risultati diversi.

Appendice A

Commutatore del campo scalare ϕ

$$x = (x^0, x^1)$$

$$x_{\pm} = x^0 \pm x^1 \quad (\text{A.1})$$

$$\phi_{\pm}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \{c_{\pm,n} e^{-i\frac{2\pi}{L} n x_{\pm}} + \text{herm.con.}\} \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_{\pm}^{(+)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} c_{\pm,n} e^{-i\frac{2\pi}{L} n x_{\pm}} \quad (\text{A.3})$$

$$\phi_{\pm}^{(-)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} c_{\pm,n}^{\dagger} e^{+i\frac{2\pi}{L} n x_{\pm}} \quad (\text{A.4})$$

$$[c_{\pm,n}, c_{\pm,m}^{\dagger}] = \delta_{m,n} \quad (\text{A.5})$$

Calcoliamo il commutatore

$$\begin{aligned} [\phi_{\pm}^{(+)}(x + \varepsilon), \phi_{\pm}^{(-)}(x)] &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{n m}} e^{-i\frac{2\pi}{L} n(x_{\pm} + \varepsilon_{\pm})} e^{+i\frac{2\pi}{L} m x_{\pm}} [c_{\pm,n}, c_{\pm,m}^{\dagger}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{n} e^{-i\frac{2\pi}{L} n \varepsilon_{\pm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e^{-i\frac{2\pi}{L} \varepsilon_{\pm}} \right)^n \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \left(e^{-i\frac{2\pi}{L} \varepsilon_{\pm}} \right)^n = -\frac{1}{4\pi} \log[1 - e^{-i\frac{2\pi}{L} \varepsilon_{\pm}}] \\ \text{per } \varepsilon \rightarrow 0 &= -\frac{1}{4\pi} \log\left[i \frac{2\pi}{L} \varepsilon_{\pm}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \log\left[\frac{-iL}{2\pi \varepsilon_{\pm}}\right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Prodotto $\psi_{\pm}^{\dagger}\psi_{\pm}$

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} C_{\pm} e^{\pm i(q_{\pm} + \frac{2\pi}{L} p_{\pm} x)} : e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} : \\ C_{+} &= 1, \quad C_{-} = \exp\{i\pi(p_{+} - p_{-})\}\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Formule di Baker-Hausdorff

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$$

se $[A, B]$ e' un c-numero

$$e^{\pm i(q_{\pm} + \frac{2\pi}{L} p_{\pm} x)} = e^{\pm iq_{\pm}} e^{\pm i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} x} e^{i\frac{\pi}{L} x} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}^{\dagger}(x + \varepsilon)\psi_{\pm}(x) &= \\ \frac{1}{\sqrt{L}} : e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x+\varepsilon)} : e^{\mp i(q_{\pm} + \frac{2\pi}{L} p_{\pm} (x+\varepsilon))} C_{\pm}^{\dagger} \cdot C_{\pm} e^{\pm i(q_{\pm} + \frac{2\pi}{L} p_{\pm} x)} : e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} : &:= \\ \frac{1}{L} e^{\mp iq_{\pm}} e^{\mp i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} (x+\varepsilon)} e^{i\frac{\pi}{L} (x+\varepsilon)} e^{\pm iq_{\pm}} e^{\pm i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} x} e^{i\frac{\pi}{L} x} : e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x+\varepsilon)} : : e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} : &:= \\ \frac{1}{L} e^{-i\frac{2\pi}{L} (x+\varepsilon)} e^{\mp i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} (x+\varepsilon)} e^{\mp iq_{\pm}} e^{i\frac{\pi}{L} (x+\varepsilon)} e^{\pm iq_{\pm}} e^{\pm i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} x} e^{i\frac{\pi}{L} x} : e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x+\varepsilon)} : : e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} : &:= \\ \frac{1}{L} e^{-i\frac{\pi}{L} \varepsilon} e^{\mp i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} \varepsilon} e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(-)}(x+\varepsilon)} e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(+)}(x+\varepsilon)} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(-)}(x)} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(+)}(x)} &:=\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Utilizzando ora il commutatore (A.6) ricaviamo

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}^{\dagger}(x + \varepsilon)\psi_{\pm}(x) &= \\ \frac{-i}{2\pi\varepsilon_{\pm}} e^{-i\frac{\pi}{L}\varepsilon_{\pm}} e^{\mp i\frac{2\pi}{L} p_{\pm} \varepsilon_{\pm}} e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(-)}(x+\varepsilon)} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(-)}(x)} e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(+)}(x+\varepsilon)} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}^{(+)}(x)} &:=\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Appendice B

Normal ordering rispetto ad un parametro di massa

Vogliamo studiare l'ordinamento normale dell'esponenziale di un campo scalare al variare del parametro di massa rispetto a cui è definita la procedura di ordinamento.

Siano dati un campo scalare $\phi(x)$ ed il suo momento coniugato $\pi(x)$. Lo spazio su cui sono definiti i campi sia il piano di Minkowskij. In visuale di Schrödinger un loro sviluppo è

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2\omega(k, m)} \right]^{\frac{1}{2}} [a(k, m)e^{-ikx} + a^\dagger(k, m)e^{ikx}], \quad (\text{B.1})$$

$$\pi(x) = i \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\omega(k, m)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} [a(k, m)e^{-ikx} - a^\dagger(k, m)e^{ikx}], \quad (\text{B.2})$$

dove

$$\omega(k, m) = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.3})$$

Gli operatori $a(k, m)$ e $a^\dagger(k, m)$ sono definiti dallo sviluppo precedente: osserviamo che sebbene le (B.1) e (B.2) siano identiche allo sviluppo di un campo di massa m , non facciamo nessuna ipotesi sulla massa fisica del campo ϕ .

Le regole di commutazione indotte da (B.1) e (B.2) sono

$$[a(k, m), a^\dagger(k', m)] = \delta(k - k'). \quad (\text{B.4})$$

In visuale di Schrödinger il normal ordering è una prescrizione di ordinamento degli operatori che equivale a porre tutti gli operatori a di distruzione a destra

rispetto agli operatori a^\dagger di creazione.

Dato l'operatore

$$e^{i \int d^2x J(x)\phi(x)} , \quad (\text{B.5})$$

il teorema di Wick comporta che per ogni funzione $J(x)$ (cfr.[20] pag.180)

$$e^{i \int d^2x J(x)\phi(x)} = N_m [e^{i \int d^2x J(x)\phi(x)}] e^{-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y J(x)\Delta_m(x-y)J(y)} , \quad (\text{B.6})$$

dove $\Delta_m(x-y)$ è il propagatore scalare libero per un campo di massa m . Abbiamo indicato il normal ordering con N_m , dove il pedice sta ad indicare il parametro di massa arbitrario che compare in (B.1) e seguenti.

Per piccole separazioni di tipo spazio, il propagatore Δ_m è approssimato da

$$\Delta_m(x) = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{m^2 e^{2\gamma}}{4} x^2\right) + O(x^2) , \quad (\text{B.7})$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Regolarizziamo la singolarità ultravioletta con un parametro di cut-off:

$$\Delta_m(x; \Lambda) = \Delta_m(x) - \Delta_\Lambda(x) , \quad (\text{B.8})$$

$$\Delta_m(0; \Lambda) = -\frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) . \quad (\text{B.9})$$

Facciamo il limite in (B.6) per $J(x) \rightarrow \delta(x)$:

$$e^{i\phi(x)} = N_m [e^{i\phi(x)}] e^{-\frac{1}{2}\Delta_m(0;\Lambda)} . \quad (\text{B.10})$$

Per convenienza riscaliamo il campo ϕ di un valore α

$$\phi(x) \longrightarrow \alpha\phi(x)$$

$$e^{i\alpha\phi(x)} = N_m [e^{i\alpha\phi(x)}] e^{-\frac{\alpha^2}{2}\Delta_m(0;\Lambda)} . \quad (\text{B.11})$$

Possiamo ora confrontare il normal ordering dell'esponenziale del campo ϕ rispetto a due generici parametri di massa

$$N_{m_1} [e^{i\alpha\phi(x)}] \left(\frac{m_1^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\alpha^2}{8\pi}} = N_{m_2} [e^{i\alpha\phi(x)}] \left(\frac{m_2^2}{\Lambda^2}\right)^{\frac{\alpha^2}{8\pi}} , \quad (\text{B.12})$$

da cui otteniamo una legge di scala rispetto al parametro di massa

$$N_{m_1} [e^{i\alpha\phi(x)}] = \left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)^{\frac{\alpha^2}{8\pi}} N_{m_2} [e^{i\alpha\phi(x)}] , \quad (\text{B.13})$$

dove la dipendenza dal cut-off Λ è scomparsa.

Dimentichiamo per il momento la necessità di una regolarizzazione dei propagatori e riscriviamo formalmente la (B.13)

$$N_{m_1}[e^{i\alpha\phi(x)}]e^{-\frac{1}{2}\Delta_{m_1}(0)} = N_{m_2}[e^{i\alpha\phi(x)}]e^{-\frac{1}{2}\Delta_{m_2}(0)}. \quad (\text{B.14})$$

La (B.14) può essere considerata come il limite

$$N_{m_1}[e^{i\alpha\phi(x)}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon^2 < 0} N_{m_2}[e^{i\alpha\phi(x)}]e^{-\frac{1}{2}(\Delta_{m_2}(\varepsilon) - \Delta_{m_1}(\varepsilon))}, \quad (\text{B.15})$$

se la singolarità ultravioletta è esattamente cancellata dalla differenza $\Delta_{m_2}(x) - \Delta_{m_1}(x)$.

In generale, per $m_i \neq 0$ abbiamo visto che questo limite è ben definito.

Traduciamo quanto appena fatto sul piano di Minkowskij ad un campo scalare senza modi nulli quantizzato sul cilindro: questo è infatti il campo ϕ che abbiamo utilizzato nella trattazione operatoriale del modello di Schwinger.

Il propagatore associato a questo campo è dato da (1.20)

$$\Delta_m(t, x) = \frac{1}{2\pi L} \sum_{n \neq 0} \int dk \frac{e^{-i(\omega_n x + kt)}}{\omega_n^2 + k^2 + m^2}, \quad (\text{B.16})$$

dove, per seguire la notazione del capitolo 2, abbiamo scambiato i ruoli delle coordinate t e x .

Vogliamo ora calcolare il propagatore per distanze di tipo spazio: ci mettiamo a $t = 0$ per consistenza con la visuale di Schrödinger nella quale abbiamo deciso di lavorare

$$\begin{aligned} \Delta_m(0, x) &= \frac{1}{2\pi L} \sum_{n \neq 0} \int dk \frac{e^{-i(\omega_n x + kt)}}{\omega_n^2 + k^2 + m^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2L} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-i\omega_n x}}{\sqrt{\omega_n^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-i\omega_n x}}{\sqrt{(2\pi n)^2 + (mL)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Nell'origine il comportamento dei propagatori è quindi

$$\Delta_0(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n > 0} \frac{1}{n}, \quad (\text{B.18})$$

$$\Delta_m(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n > 0} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (\frac{mL}{2\pi})^2}}. \quad (\text{B.19})$$

Regolarizziamo le serie come in [21]: l'importante è isolare nello stesso modo il comportamento singolare, in modo che la differenza delle parti finite non sia ambigua

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^{1+s}} = \frac{1}{s} + \gamma + O(s) , \quad (\text{B.20})$$

$$\sum_{n>0} \frac{1}{\left(\sqrt{n^2 + \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}\right)^{\frac{1+s}{2}}} = \frac{1}{s} - \frac{\pi}{x} - \log \frac{x}{4\pi} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} K_0(px) + O(s) (\text{B.21})$$

e quindi

$$\Delta_0(0) - \Delta_m(0) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma + \frac{\pi}{mL} + \log \frac{mL}{4\pi} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} K_0(pmL) \right] . \quad (\text{B.22})$$

La somma sulle funzione di Bessel K_0 può essere trasformata in forma integrale

$$\sum_{p=1}^{\infty} K_0(px) = - \int_0^{\infty} \frac{du}{e^{x \cosh(u)} - 1} . \quad (\text{B.23})$$

Riscriviamo infine la relazione tra i diversi ordinamenti normali per un campo scalare definito sul cilindro

$$N_0[e^{i\sqrt{4\pi}\phi(x)}] = N_{\mu}[e^{i\sqrt{4\pi}\phi(x)}]B(\mu L) , \quad (\text{B.24})$$

$$B(\mu L) = \frac{\mu L}{4\pi} \exp \left[\gamma + \frac{\pi}{\mu L} - 2 \int_0^{\infty} \frac{du}{e^{\mu L \cosh(u)} - 1} \right] . \quad (\text{B.25})$$

In (B.20) e (B.21) riconosciamo i termini costituenti di $J(\beta\mu)$ della formula (3.104) e quindi abbiamo anche calcolato

$$e^{J(\beta\mu)} = B(\mu L) . \quad (\text{B.26})$$

Appendice C

Funzioni di Green per operatori con modi nulli

Sia A un operatore senza modi nulli ed esista un sistema ortonormale completo di autofunzioni di A :

$$A\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x) ,$$
$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int dx \bar{\psi}_n(x)\psi_m(x) = \delta_{n,m} ,$$

La funzione di Green \mathcal{G} per l'operatore A è definita da

$$A(x, y) \mathcal{G}(x, y) = \delta(x - y) . \tag{C.1}$$

\mathcal{G} è una distribuzione e può essere rappresentata da

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\bar{\psi}_n(y)}{\lambda_n} .$$

E' immediato verificare infatti che questa definizione rende vera l'uguaglianza (C.1) in \mathcal{S}' :

$$\begin{aligned} A\mathcal{G}(x, y)[\phi] &= \int dy \mathcal{G}(x, y)A\phi(y) \\ &= \int dy \mathcal{G}(x, y)A \sum_n c_n\psi_n(y) \\ &= \int dy \mathcal{G}(x, y) \sum_n c_n\lambda_n\psi_n(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int dy \sum_{n,m} \frac{\psi_m(x) \bar{\psi}_m(y)}{\lambda_m} c_n \lambda_n \psi_n(y) \\
&= \sum_{n,m} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} c_n \psi_m(x) \delta_{n,m} \\
&= \sum_n c_n \psi_n(x) = \phi(x)
\end{aligned}$$

e quindi

$$A\mathcal{G}(x,y)[\phi] = \phi(x) = \delta(x-y)[\phi] .$$

Se A ha invece un nucleo non banale, scegliamo una base per $\ker A$ fatta di modi nulli ortogonali χ_i . Possiamo ancora definire una funzione di Green, limitandola ai soli modi eccitati

$$\mathcal{G}_e(x,y) = \sum_n \frac{\psi_n(x) \bar{\psi}_n(y)}{\lambda_n}$$

e l'equazione a cui soddisfa è

$$A(x,y)\mathcal{G}_e(x,y) + P(x,y) = \delta(x-y) , \quad (\text{C.2})$$

dove $P(x,y)$ è il proiettore sui modi nulli

$$P(x,y) = \sum_i \chi_i(x) \bar{\chi}_i(y) . \quad (\text{C.3})$$

Appendice D

Listato Fortran

```
      program numerov
c      Integra numericamente un'equazione di Schroedinger
c      con un potenziale arbitrario, utilizzando il metodo
c      di Numerov
c      Ringraziamo il Dott.F.L.Ancillotto per averci
c      suggerito questa tecnica di integrazione e per
c      i preziosi consigli
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension tt(120000),u(120000)
      real*8 kappa,lung
c
      pi=4.*datan(1.d0)
c
      eps=1.d-10
      nmax=500
c
      read(6,*)lung,h,omega,kappa,theta
c
      write(6,*) lung,h,omega,kappa,theta
c
      numero di punti in cui suddividiamo l'intervallo
      nrl=int(1.0*lung/h)+1
      if(nrl.gt.120000) stop 'nrl.ge.120000'
      r0=lung/2.
c
      vmin=9999999
      vmax=-9999999
c
      cerca il minimo per riscaldare le energie
      do 553 i=1,nrl
      rr=h*dble(i-1)-r0
c
      FORMA ESPLICITA DEL POTENZIALE
c
      vi= 0.5*omega**2*rr**2-0.5*kappa*dcos(theta-2*pi*rr)
      if(vi.gt.vmax)vmax=vi
      if(vi.lt.vmin)vmin=vi
553      continue
c
      do 220 i=1,nrl
c
      rr=h*dble(i-1)
c
      ridefinisce l'origine delle coordinate
```

```

rr=rr-r0
vi= 0.5*omega**2*rr**2-0.5*kappa*dcos(theta-2*pi*rr)-vmin

220 tt(i)=2*vi*h*h/12.
c continue
c numero dei nodi della funzione d'onda
nd=0
c lo stato fondamentale non ha nessun nodo!!!

write(4,118)nd

e0=0
e1=vmax-vmin

elower=e0
eupper=e1

niter=0

n1=0
n0=0

c valore iniziale per l'energia
40 ee=0.5*(e1+e0)
45 nod=0

c cerca il punto di inversione classico

do 230 i=1,nrl-1
rr=h*dbple(i-1)-r0
facm=12.*tt(i )/(2.*h*h)
facp=12.*tt(i+1)/(2.*h*h)
if (ee.gt.facm.and.ee.le.facp)then
xinv=rr
nmat=i/2
go to 80
endif
230 continue
print *, ' non c'e' inversione classica'
stop
80 continue
if(nmat.ge.(nrl-3))stop' nmat.ge.nrl'
nt=nrl
if(nt.gt.nrl)nt=nrl

c niter conteggia il numero di iterazioni
niter=niter+1
if(niter.gt.nmax)then
niter=nmax
write(6,115)
115 format(3x,'Superato il numero massimo di interazioni',/)
go to 70
endif

c
c
c inizio dell'algorithmo di Numerov

enr=(2.*ee)*h*h/12.
sum=0.

u(1)=0.0
u(2)=h/100
sg2=dsign(1.d0,u(2))

do 20 i=3,nmat
c
c
c formula di ricorsione fondamentale
u(i)=((2.+10.*(tt(i-1)-0.5*enr))*u(i-1)-

```

```

                (1.-(tt(i-2)-0.5*enr))*u(i-2))/(1.-(tt(i)-0.5*enr))
c      contatore di nodi della funzione
c
      sg1=dsign(1.d0,u(i))
      if(sg1.ne.sg2)nod=nod+1
      sg2=sg1
c      integrazione con il metodo dei trapezi
      u2=u(i)**2
      sum=sum+2.*u2
20     continue
c      ancora un punto per calcolare la derivata prima
      umatp1=((2.+10.*(tt(nmat)-0.5*enr))*u(nmat)-
(1.-(tt(nmat-1)-0.5*enr))*u(nmat-1))/(1.-(tt(nmat+1)-0.5*enr))
c      derivata prima e funzione di prova al punto di incontro
c      (integrazione verso dx)
      dright=((0.5-(tt(nmat+1)-0.5*enr))*umatp1
              -(0.5-(tt(nmat-1)-0.5*enr))*u(nmat-1))/h
      uright=u(nmat)
      sum=sum-u(nmat)**2+u(1)**2+2.*u(2)**2
c      integrazione verso sx
      sum=0.
      u(nt)=0.
      u(nt-1)=h/100
      sg2=dsign(1.d0,u(nt-1))
      do 30 i=nt-2,nmat,-1
      u(i)=((2.+10.*(tt(i+1)-0.5*enr))*u(i+1)-
              (1.-(tt(i+2)-0.5*enr))*u(i+2))/(1.-(tt(i)-0.5*enr))
      sg1=dsign(1.d0,u(i))
      if(sg1.ne.sg2)nod=nod+1
      sg2=sg1
      u2=u(i)**2
      sum=sum+2.*u2
30     continue
      umatp1=((2.+10.*(tt(nmat)-0.5*enr))*u(nmat)-
(1.-(tt(nmat+1)-0.5*enr))*u(nmat+1))/(1.-(tt(nmat-1)-0.5*enr))
c      derivata prima e funzione di prova al punto di incontro
c      (integrazione verso sx)
      dleft=-((0.5-(tt(nmat-1)-0.5*enr))*umatp1
              -(0.5-(tt(nmat+1)-0.5*enr))*u(nmat+1))/h
      uleft=u(nmat)
      sum=sum-u(nmat)**2+u(nt+1)**2+2.*u(nt)**2
      sumleft=0.5*h*sum
      diff=dright/uright-dleft/uleft
      dsquare=sumright/(uright**2)+sumleft/(uleft**2)
c      Correzione all'autovalore dell'energia
      dee=(diff/dsquare)/2.
c      Correto numero di nodi? se no, dimezza l'intervallo
c      e riaggiusta i limiti
      if(nd.eq.nod)go to 50
      if(nod.gt.nd)then
      e1=ee
      n1=0

```

```

endif
if(nod.lt.nd)then
e0=ee
n0=0
endif
go to 40
50 continue
c Sia e0 che e1 danno il numero atteso di nodi?

if(n1.eq.1.and.n0.eq.1)go to 60
c dimezza l'intervallo e riaggiusta e0,e1 in base al
c segno della correzione

if(dee.gt.0.)then
e0=ee
n0=1
else
e1=ee
n1=1
endif
go to 40

c parte di convergenza rapida dell'algoritmo
60 continue
ee=ee+dee
if(dabs(dee).lt.eps)go to 70
c ancora un'iterazione senza riaggiustare e0 e e1
go to 45
c
c mostra la funzione calcolata e l'autovalore dell'energia
c
70 continue

print *,' dright,  uright = ',dright,uright
print *,' dleft , uleft = ',dleft,uleft

enr=(2.*ee)*h*h/12.
u(1)=0.0
u(2)=h/100
do 820 i=3,nt
u(i)=((2.+10.*(tt(i-1)-0.5*enr))*u(i-1)-
      (1.-(tt(i-2)-0.5*enr))*u(i-2))/(1.-(tt(i)-0.5*enr))
820 continue

c taglia la coda della funzione che puo' essere esplosa
do 370 i=nt-1,1,-1

if(abs(u(i)).gt.abs(u(i+1))) then
ntaglio=i
write(6,*) 'ntaglio = ',ntaglio,u(ntaglio)
go to 373
endif

if(i.lt.nt/2)then
write(6,*) 'non riesco a tagliare la coda!!!'
go to 460
endif
370 continue

c normalizzazione in L^2 con regola dei trapezi
c ed integrale di |f|^2 cos(th - 2Pi rr)
373 costnorm=0.
cosintegrale = 0.

do 375 i=2,nt-1
costnorm=costnorm+2.*(u(i)**2)
rr=h*dble(i-1)-r0
cosintegrale = cosintegrale+2.*(u(i)**2)*dcos(theta-2*pi*rr)

```

```

375     continue

costnorm=costnorm+u(1)**2+u(nt)**2
cosintegrale = cosintegrale+(u(1)**2)*dcos(theta+2*pi*r0)
              +(u(nt)**2)*dcos(theta-2*pi*r0)

costnorm=0.5*h*costnorm
costnorm=dsqrt(costnorm)
cosintegrale = 0.5*h*cosintegrale/costnorm/costnorm

c     rinormalizza
do 376 i=1,nt
u(i)=u(i)/costnorm
376   continue

open (55,file='risul.dat',status='old',form='formatted')
write(55,137) cosintegrale
do 318 i=1,nt,20
rr=h*dble(i-1)-r0
write(50,138) rr,u(i)
318   continue
close(50)

write(6,117)ee+vmin
118   format(3x,' numero di nodi impostato= ',i2)
117   format(3x,' e = ',e13.7)
122   format(3x,'numero di iterazioni = ',i3,/)
137   format(e13.7)
138   format(e13.7,' ',e13.7)
789   continue
999   continue

write(6,120)h,nt
write(6,140) cosintegrale

110   format(3x,'Numero di nodi= ',i2,3x,' Autovalore energia = ',
f8.4,' +/-',1x,f6.4,' (meV) ',/)
120   format(3x,'Passo di integrazione h = ',f8.6,4x
,'Numero totale di punti = ',i10,/)
130   format(3x,'Intervallo di integrazione [',f6.1,' ',f6.1,']',/)
140   format(1x,'Integrale del coseno: ',e13.7,/)

go to 1000

c     esce senza risultato

460   open(50,file='lista.dat',status='old',form='formatted')

do 319 i=1,nt,20
rr=h*dble(i-1)-r0
write(50,138) rr,0.0
319   continue
close(50)

open (55,file='risul.dat',status='old',form='formatted')
write(55,137) 0.0
close(50)
1000  continue
end

```


Bibliografia

- [1] J. Schwinger, *Gauge Invariance and Mass*, PHYS. REV. **128** 2425 (1962)
- [2] E. Abdalla, M. C. Abdalla e K. D. Rothe, *Non Perturbative Methods in Two Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore (1991).
- [3] P.B.Gilkey, *The Index Theorem and the Heat Equation*, Publish or Perish, Boston (1974)
- [4] C.Jayewardena, *Schwinger model on S^2* , HELV.PHYS.ACTA **61** (1988) 636
- [5] J.H.Loewenstein e J.A.Swieca, ANN. PHYS. **68** (1971) 172
- [6] I.Sachs e A.Wipf, *Finite Temperature Schwinger Model*, HELV. PHYS. ACTA **65** (1992) 652
- [7] J.V.Steele et al., *General Correlation Functions in the Schwinger Model at Zero and Finite Temperature*, **preprint hep-th 9503220**, (1995)
- [8] S.Coleman,R.Jackiw e L.Susskind, *Charge Shielding and Quark Confinement in the Massive Schwinger Model*, ANN. OF PHYS. **93** (1975) 267
- [9] E.Mottola,A.Wipf, PHYS. REV. **D39** (1989) 588

- [10] S.Coleman, *Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model*, *PHYS. REV.* **D11** (1975) 2088
- [11] Y.Hosotani e R.Rodriguez, *Anomalous Behavior in the Massive Schwinger Model*, **preprint hep-ph 9608176**, 1996
- [12] J.E.Hetrick e Y.Hosotani, *QED on a circle*, *PHYS. REV.* **D38** (1988) 2621
- [13] S.Azakov, *The Schwinger Model on the Torus*, **preprint hep-th 9608103**, 1996
- [14] C.Adam, *Vacuum functional and fermion condensate in the massive Schwinger model*, **preprint hep-ph 9507279**, 1995
- [15] M.Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (UK) (1996)
- [16] M.S.Swanson, *Path Integral and Quantum Processes*, Academic Press, Inc. (1992)
- [17] G.De Marco, *Analisi Due*, Decibel Zanichelli, Padova (1993)
- [18] M.E.Peskin P.V.Schröder, *An introduction to QFT*, Addison-Wesley, (1995)
- [19] K.Fujikawa, *Path integral for gauge theories with fermions*, *PHYS. REV.* **D21** (1980) 2848
- [20] C.Itzykson e J.B.Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, International Edition (1985)
- [21] H.Kirsten e V.F.Müller, *ZEIT.PHYS.*, **C45**, (1989) 159
- [22] F.Strocchi, *A short introduction to the foundations of QFT*, Lectures Notes, S.I.S.S.A. Trieste (1992)
- [23] N.D.Mermin e H.Wagner, *PHYS. REV. LETT.* **17** (1966) 1133

RINGRAZIAMENTI

Vorrei innanzitutto ringraziare le persone che mi hanno aiutato nella realizzazione di questa tesi: in primis il Prof. Antonio Bassetto con il quale ho avuto modo di instaurare in questi mesi un particolare rapporto di confidenza telematica.

Un grazie vivissimo al Dott. Luca Griguolo, contumace tuttora a Boston, che mi ha confortato e consigliato nei momenti difficili.

Sempre da lungi vedo lo sguardo benevolo e rassicurante del Prof. Luciano Bertocchi, che mi ha seguito in questi anni di studio.

Il ricordo delle notti insonni trascorse con il neo-dottore Giangi è ancora vivo e bruciante: a lui un commosso grazie per la sollecitudine nel rispettare gli appuntamenti concordati ed un ‘in bocca al lupo’ per il suo personale calvario.

Buona parte delle finezze L^AT_EX contenute in questo cesellato dattiloscritto, se mai ve ne fossero, sono merito della sterminata generosità del Buon Boltz e della sua maniacale attenzione all’apparenza grafica.

Nel mucchio pesco a caso il Presidente del Club dei Falchi (Marco) e il segretario-organizzatore della medesima polisportiva (Francesco-Filini), i quali con magnanimità inconsueta mi hanno associato honoris causa in qualità di Ala Spezzata: titolo del quale vado giustamente fiero.

Spero di non spaventare ora l’incauto lettore, nominando ad uno ad uno gli animali che hanno popolato il mio zoo patavino: grazie per questi anni trascorsi dolorosamente insieme al De’ Pidis, al Fregnone ed al Vecchio Tobia. Un pensiero amorevole anche alla Rösy ed al Malox. Benché ormai definitivamente disperso, ricordo qua Andrea ZioLeo, scapicollato maestro nell’arte di incrodarsi in montagna.

Concludo questa passerella chiamando una volta di più sul palco lo sgangherato Concentus Musicus Patavinus, premiato coro universitario, nel quale ho militato togliendo il sonno a più di un musicologo.

Note oniriche composte in Pava

24 febbraio 1997